



# Amortir les vibrations et les instabilités sans se mettre dans tous ses états

Gaël Chevallier

## ► To cite this version:

Gaël Chevallier. Amortir les vibrations et les instabilités sans se mettre dans tous ses états. Vibrations [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie, 2012. tel-01246662

**HAL Id: tel-01246662**

**<https://theses.hal.science/tel-01246662>**

Submitted on 30 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Habilitation à Diriger des Recherches  
Spécialité : Sciences pour l'ingénieur

Présentée par

Gaël CHEVALLIER

# Amortir les Vibrations et Instabilités

sans se mettre dans tous ses

$\eta$

Soutenue le 29 novembre 2012

Devant le jury composé de :

Jean-François DEU	CNAM	<i>Rapporteur</i>
Marcelo TRINDADE	EESC Brésil	<i>Rapporteur</i>
Jean-Jacques SINOU	ECL	<i>Rapporteur</i>
Etienne BALMES	ARTS	<i>Examineur</i>
Joël POUGET	UPMC	<i>Président</i>
Ayech BENJEDDOU	ISMEP	<i>Examineur</i>



---

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>v</b>
<b>Curriculum Vitae détaillé</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	2
1.2 Motivations . . . . .	3
1.3 Principes généraux sur les rhéologies amortissantes . . . . .	4
1.3.1 Modélisation paramétrique linéaire . . . . .	5
1.3.2 Equivalence Temps - Température . . . . .	8
1.3.3 Mesure de l'amortissement . . . . .	8
1.3.4 Modélisation paramétrique non-linéaire . . . . .	11
1.4 Modélisation de l'amortissement en dynamique des structures . . . . .	14
1.4.1 Comportements amortissants linéaires . . . . .	14
1.4.2 Réduction de modèles . . . . .	17
1.4.3 Amortissement modal . . . . .	18
1.4.4 Comportements amortissants non-linéaires . . . . .	19
<b>2 Couplages Electromécaniques</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.2 Modélisation . . . . .	23
2.3 Couplage électromécanique matériel . . . . .	25
2.4 Amortissement des vibrations . . . . .	27
2.5 Détermination du coefficient de Couplage . . . . .	29
2.5.1 Définitions . . . . .	30
2.5.2 Méthodes numériques . . . . .	31
2.5.3 Méthodes expérimentales . . . . .	33
2.6 Aspects méthodologiques . . . . .	34
2.6.1 Corrélation entre la polarisation et le câblage électrique . . . . .	34
2.6.2 Equipotentialité . . . . .	34
2.7 Conclusions et perspectives . . . . .	35
<b>3 Viscoélasticité : de la mesure à la simulation</b>	<b>37</b>
3.1 Introduction et contexte de ces travaux . . . . .	38
3.2 Viscoanalyse . . . . .	38
3.3 Simulation . . . . .	41
3.3.1 Réduction de modèles . . . . .	42
3.3.2 Pôles communs . . . . .	43
3.4 Identification . . . . .	44
3.4.1 Principes généraux . . . . .	45
3.4.2 Pôles communs . . . . .	46



3.5	Conclusions et perspectives . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Instabilités provoquées par le frottement</b>	<b>51</b>
4.1	Introduction et contexte de ces travaux . . . . .	52
4.2	Etude expérimentale du mouvement . . . . .	52
4.2.1	Instrumentation du moyen d'essai . . . . .	53
4.2.2	Résultats bruts et post-traités . . . . .	53
4.2.3	Discussion . . . . .	54
4.3	Mise au point d'un outil de simulation . . . . .	54
4.3.1	Réduction de modèles . . . . .	55
4.3.2	Intégration de la viscoélasticité . . . . .	56
4.4	Sollicitations subies par un élément viscoélastique . . . . .	58
4.4.1	Description du modèle . . . . .	58
4.4.2	Résultats globaux . . . . .	59
4.4.3	Post-traitement des énergies de déformation . . . . .	59
4.5	Conclusions et perspectives . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Amortissement des vibrations par frottement sec</b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	64
5.2	Moyens d'essai et caractérisation . . . . .	64
5.2.1	Montage académique . . . . .	65
5.2.2	Montage technologique . . . . .	66
5.2.3	Dynamique de l'essai . . . . .	67
5.2.4	Résultats d'essais . . . . .	69
5.3	Simulation quasi statique . . . . .	69
5.3.1	Définition de l'énergie dissipée . . . . .	70
5.3.2	Utilisation des résultats dans les simulations dynamiques . . . . .	71
5.4	Conclusions et perspectives . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Couplages Electromécaniques</b>	<b>79</b>
A.1	A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures .	90
A.2	Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques composites . . . . .	116
A.3	Piezoceramic shunted damping concept : testing modelling and correlation . . . . .	131
<b>B</b>	<b>Viscoélasticité : de la mesure à la simulation</b>	<b>133</b>
B.1	A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized Maxwell model . . . . .	153
B.2	Viscoelasticity measurement and identification of viscoelastic parametric models . . . . .	161
B.3	Complex eigenvalue analysis for structures with viscoelastic behavior . . . . .	171
<b>C</b>	<b>Instabilités provoquées par le frottement</b>	<b>173</b>
C.1	Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system	185
C.2	Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : a numerical study . . . . .	194
C.3	Prise en compte des comportements viscoélastiques dans la simulation dynamique des systèmes de freinage . . . . .	206

<b>D Amortissement des vibrations par frottement sec</b>	<b>207</b>
D.1 Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding . . . . .	217
D.2 Micro-slip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress . . .	242
D.3 A numerical quasi-static method for the identification of frictional dissipation in bolted joints	249

\*



# Préface

*On ne fait jamais attention à ce qui a été fait,  
on ne voit que ce qui reste à faire.*  
Marie Curie : Physicienne française (1867-1934),  
Prix Nobel de Physique.



Ce mémoire est une synthèse de l'essentiel de mes travaux de recherche depuis ma soutenance de thèse en 2005. Ces travaux ont été menés avec le support du Laboratoire de Supméca : le LISMMA, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des MATériaux. Tous ces travaux n'auraient évidemment pas vu le jour sans la contribution de mes collègues, Jean-Luc, Julie, Hamiddou, Christophe, Ayech et des étudiants que nous avons encadré, Franck, Salma, Nicolas, Hugo, Fred, Fatma, Sylvain et bien d'autres. Certains de ces étudiants sont aujourd'hui des collègues, d'autres ont poursuivi leur trajectoire dans l'industrie ; tous m'ont beaucoup apporté scientifiquement et humainement dans mon métier d'enseignant-chercheur.

J'ai fait le choix de construire ce mémoire comme une collection d'articles précédée d'une synthèse de mes travaux de recherche. Ce choix a été motivé par les préconisations de l'école doctorale de l'Université Pierre et Marie Curie et par l'intérêt que je portais à l'exercice de synthèse qui me permet d'essayer de prendre un peu de hauteur sur l'ensemble de ces travaux. Dans cette synthèse, certains détails sont évidemment omis, le lecteur trouvera les explications manquantes dans les articles. De même, volontairement, l'essentiel des références bibliographiques se trouve dans les articles et seules quelques références sont rappelées en pied de page. Dans un souci de cohérence, certains travaux, dans lesquels ma contribution a été plus marginale ne sont pas présentés dans ce mémoire. Le premier chapitre est une introduction détaillée qui effectue des rappels sur les comportements amortissants d'un point de vue rhéologique et leur portage dans les simulations. Les chapitres suivants sont les synthèses de mes travaux sur les couplages piézoélectriques, la viscoélasticité, le crissement, l'amortissement par frottement.

Ces travaux s'inscrivent dans le domaine des vibrations et plus largement dans celui des Sciences de l'Ingénieur. Nous nous sommes tous posés la question de l'intérêt de faire encore de la recherche dans un domaine appliqué pour lequel les lois fondamentales sont déjà écrites. Notre apport se situe dans l'adaptation de théories ou d'outils mathématiques parfois abstraits, dans l'adaptation de méthodes venant d'autres domaines de la physique ou des sciences de l'ingénieur. L'avènement de l'informatique et l'augmentation de la puissance de calcul permet aujourd'hui d'utiliser la simulation numérique pour prédire certains phénomènes ou pour post-traiter des résultats d'expérience. Enfin l'existence d'un laboratoire dans une école d'ingénieur favorise une forme d'enseignement par projets mettant en oeuvre des expériences et des simulations sur des sujets émergents.

# Curriculum Vitae détaillé



Infos actualisées sur [http ://lisma.supmeca.fr/?q=node/4486](http://lisma.supmeca.fr/?q=node/4486)

## Etat Civil

Gaël CHEVALLIER

né le 25 Octobre 1976 à LAVAL (53)

PACSE avec Aurélie RIGAUD, Documentaliste

3 enfants : Hugo, Romane et Juliette

## Me contacter

Coordonnées	
Professionnelles	Personnelles
SUPMECA - LISMA - EA 2336 3 rue Fernand HAINAUT 93400 SAINT-OUEN FRANCE tel : 0149452945 gael.chevallier@supmeca.fr	12 bis avenue André ROUY 94350 VILLIERS S/ MARNE FRANCE tel : 0662696523 chevallier.gael@free.fr

## Expérience professionnelle

Je travaille dans l'enseignement et la recherche depuis 2000. Avant d'avoir choisi cette orientation professionnelle, j'ai effectué des missions temporaires par le biais de stages ou de travaux saisonniers. Le tableau ci-dessous résume mon expérience en enseignement et recherche.

2000 (3 mois)	Stage IFREMER Brest - UPMC : Modélisation des câbles synthétiques Hautes Performances.
2001-2002	Professeur agrégé stagiaire IUFM de Créteil - Lycée de Champagne sur Seine (77).
2002 (3 mois)	Stage PSA - Direction de la Recherche et de l'Innovation - Vélizy (78) - Modélisation dynamique des courroies de distribution.
2002-2004	Détaché à SUPMECA : 192 h d'enseignement et thèse sur contrat Valéo : Etudes des instabilités provoquées par le frottement dans les systèmes d'embrayages.
2004-2006	Affecté sur un poste de Professeur Agrégé à Supméca.
2006 ...	Vacations - Travaux Pratiques à IPSA (94) - 4 heures / an.
2006-2011	Détaché sur un poste de Maître de Conférences en 60 <sup>e</sup> section.
2008 ...	Cours de Vibrations Non Linéaires dans le Master DSSC de l'ECP (92) - 3 heures puis 9 heures / an.
2011 ...	Affecté sur le poste de Maître de Conférences en 60 <sup>e</sup> section.

Le tableau ci-dessous regroupe mes autres expériences professionnelles .

Juillet 1993	SETMA-Europe - Manutentionnaire.
1994-1998	Missions d'intérimaire pour Vedior Bis.
Juillet 1995, 96, 97	SNCF - Secrétariat des projets d'infrastructures.
1998 (3 mois)	Stage Nestlé France - Marseille (13) - Automatisation d'une partie de la chaîne de production de café.

## Formation et Diplômes

Depuis l'obtention de mon Baccalauréat, ma scolarité s'est déroulée d'abord à l'Université d'Aix-Marseille puis à l'ENS Cachan suite à ma réussite au concours d'admission en 3<sup>e</sup> année et enfin au laboratoire de Supméca pour l'obtention de mon doctorat (Ecole Doctorale SMAER de l'UPMC).

---

1994	Baccalauréat série E - Lycée Joliot-Curie - Aubagne (13).
1996	Diplôme d'Etudes Universitaires Générales Mention Sciences et Structures de la Matière - Université de Provence - Marseille (13).
1997	Licence de Technologie Mécanique - Université de Provence - Marseille (13).
1998	Maitrise de Technologie Mécanique - Université de la Méditerranée - Marseille (13).
1998	Admis au concours d'entrée à l'ENS Cachan (18 <sup>e</sup> /24).
1999	Admis au concours de l'Agrégation externe de Mécanique (10 <sup>e</sup> /83).
2000	Diplôme d'Etudes Approfondies spécialité Solides, Structures et Systèmes Mécaniques - Université Pierre et Marie Curie - Paris (75).
2005	Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris (75).
2012	Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris (75).

## Rayonnement

Depuis le début de ma carrière d'enseignant-chercheur, je me suis investi dans plusieurs missions intérieures et extérieures au fonctionnement de mon établissement.

- Membre du **Conseil scientifique de Supméca** (2005-2009).
- Membre du **Conseil de laboratoire** (2007-2010).
- Membre du comité d'orientation puis du conseil d'administration de l'**AIP Primeca Ile de France**.
- Membre du comité d'organisation du **Colloque Vibrations, Chocs et Bruit** et Webmestre depuis 2008 ([www.vcb2012.fr](http://www.vcb2012.fr)).
- Relecteur pour les revues : **Mechanics et Industry, Journal of Applied Mechanics, Applied Acoustics, Shock and vibrations, Engineering Structures**.
- Membre d'un comité de sélection pour le recrutement d'un MCF à l'**Université d'Evry**.
- Membre de l'**AFM**.
- Membre de l'**ASME**.

## Activités d'enseignement

Mes activités d'enseignement portent surtout sur la formation des étudiants de l'école d'ingénieur Supméca. J'essaie d'y développer des méthodes d'enseignement dans lesquels les contenus sont motivés par des projets de conception de produits ou de développement de méthodologies d'aide à la conception. Je suis également responsable de l'option d'enseignement **Simulation en Conception Mécanique** depuis 2007. A ce titre, je conseille les étudiants pour leur orientation dans le catalogue de cours de l'école ; je les aide également à choisir un stage de fin d'étude correspondant à leur projet professionnel. Enfin je participe aux jurys de diplôme et je valide les programmes de cours pour les étudiants en mobilité académique nationale et internationale.

## Descriptif détaillé

La liste ci-dessous détaille les enseignements dans lesquels je suis intervenu ou j'interviens significativement :

- **Modélisation et Dimensionnement**

Responsable du module : Gaël CHEVALLIER

120 étudiants - 4 enseignants - 40 heures/étudiant - Niveau Licence 3<sup>e</sup> année.

Mots Clés : Critères de dimensionnement, Fatigue, Rupture, Dimensionnement de composants stan-



dards (Roulements, engrenages, visserie), Dimensionnement pour les composants non-standards, Vision utilisateur de la méthode des Éléments Finis.

– **Méthode des Éléments Finis**

Responsable du module : Ayech BENJEDDOU

70 étudiants - 4 enseignants - 40 heures/étudiant - Niveau Mastère 1<sup>e</sup> année.

Mots Clés : Analyse numérique, Formulations forte et faible, Approximation, Intégration numérique, Applications en thermique et mécanique.

– **Vibrations**

Responsable du module : Jean-Luc DION

120 étudiants - 5 enseignants - 50 heures/étudiant - Niveau Licence 3<sup>e</sup> année.

Mots Clés : Résonance, Modes propres, Amortissement, Représentations graphiques, diagnostic.

– **Dynamique des structures**

Responsable du module : Nicolas DAUCHEZ

60 étudiants - 3 enseignants - 30 heures/étudiant - Niveau Mastère 1<sup>e</sup> année.

Mots Clés : Méthodes numériques, Traitements amortissant, Réduction de modèles.

– **Projets de fin d'études**

Responsable du module : Gaël CHEVALLIER

60 étudiants - 10 enseignants - 150 heures/étudiant - Niveau Mastère 2<sup>e</sup> année.

Mots Clés : Projet de conception de systèmes ou expérimentation ou développement de logiciels.

– **Projet de conception d'un laboratoire d'essais virtuels**

Responsable du module : Gaël CHEVALLIER

40 étudiants - 3 enseignants - 60 heures/étudiant - Niveau Mastère 2<sup>e</sup> année

Objectifs : Conception d'un laboratoire d'essais virtuels reproduisant au mieux les essais réels. Application aux tests sur une bicyclette tout terrain.

– **Vibrations non-linéaires**

Responsable du module : Gaël CHEVALLIER

10 étudiants - 2 enseignants - 15 heures/étudiant - Niveau Mastère 2<sup>e</sup> année - Ecole Centrale de Paris

Mots Clés : Comportement des systèmes non-linéaires, méthodes de traitement du signal pour l'identification, méthodes pour la résolution.

– **Projets de recherche**

Responsable du module : Gaël CHEVALLIER

5 étudiants - 5 enseignants - 15 heures/étudiant - Niveau Mastère 2<sup>e</sup> année - Ecole Centrale de Paris

Objectifs : Mise en pratique des cours théoriques du Mastère, Initiation à la recherche bibliographique.

## Perspectives

Ma première partie de carrière a été consacrée à l'enseignement en école d'ingénieurs. Cette filière recrute des étudiants majoritairement issus de Classes Préparatoires aux Grandes Écoles. La formation dans les écoles s'appuie sur une solide formation théorique initiale pour dispenser des enseignements plus appliqués préparant les étudiants à leur vie professionnelle dans les Bureaux d'Etudes et les services Recherche et Développement des entreprises. Malgré le contexte économique difficile dans les pays européens, les étudiants de cette filière restent privilégiés en terme de recherche d'emploi puisque l'immense majorité ne connaît pas de période de chômage à la sortie de l'école.

Toutefois le cursus CPGE - Ecole d'Ingénieur, contrairement à sa vocation historique, reste une formation assez élitiste, c'est à dire peu accessible aux populations défavorisées socialement. Ce ne sont pas les frais de scolarité qui sont une barrière mais plutôt la réputation des CPGE qui incite beaucoup d'élèves à s'auto-censurer et à ne pas présenter de dossier d'admission. De nombreux efforts ont été faits par les écoles et les lycées pour s'ouvrir sur ces populations mais avec un succès encore modeste.

Après avoir participé activement à la vie interne de Supméca en tant qu'enseignant et responsable d'option, je souhaite m'investir dans ce qu'il se passe avant l'école et notamment participer à la mise en place d'une filière expérimentale d'accès aux études d'ingénieur. Cette filière serait basée sur un pré-recrutement intervenant plus tôt dans la formation initiale sous forme d'un projet périscolaire d'ingénierie autour d'un système (véhicule

propre, accessoire sportif, modèle réduit ...) avec une équipe mixte collégiens / élèves ingénieurs encadrée par une équipe d'enseignants mixte secondaire / supérieur. Ce projet se déroulerait sur plusieurs années avec pour point d'orgue la soumission de plusieurs dossiers scolaires pour des études supérieures techniques. Ce projet va démarrer en septembre 2013 dans le cadre d'un partenariat avec le Collège J. Baker situé à Saint-Ouen (93) en mobilisant étudiants et collégiens 2 heures par semaine. Ce projet a reçu l'aval de la direction du collège et de l'inspections académique de Créteil.

## Résumé des travaux de recherche

Mes premiers travaux de recherche ont été réalisés dans le cadre de mon stage de DEA (UPMC) : travail analytique de modélisation de la rigidité des câbles toronés pour une application marine en partenariat avec l'IFREMER. Un stage (IUFM de Créteil) à la direction de la recherche chez PSA m'a ensuite donné l'occasion de travailler sur la modélisation des câbles de renforts des courroies synchrones. Enfin la préparation de ma thèse de doctorat (LISMMA) m'a permis d'initier des travaux sur les instabilités provoquées par le frottement. Ces travaux ont été appliqués aux vibrations basses fréquences dans les systèmes d'embrayages automobiles en partenariat avec VALEO.

Mon activité de recherche depuis ma soutenance de thèse en 2005 a été motivée par plusieurs axes de recherche actifs au LISMMA. La "carte d'identité" de chacun de ces axes est détaillée ci-dessous. Le dénominateur commun de ces travaux est l'étude des **vibrations mécaniques** et en particulier de leur **amortissement**. Le tableau ci-dessous donne une estimation qualitative de la répartition du temps que je consacre à la recherche à chacun de ses axes année par année.

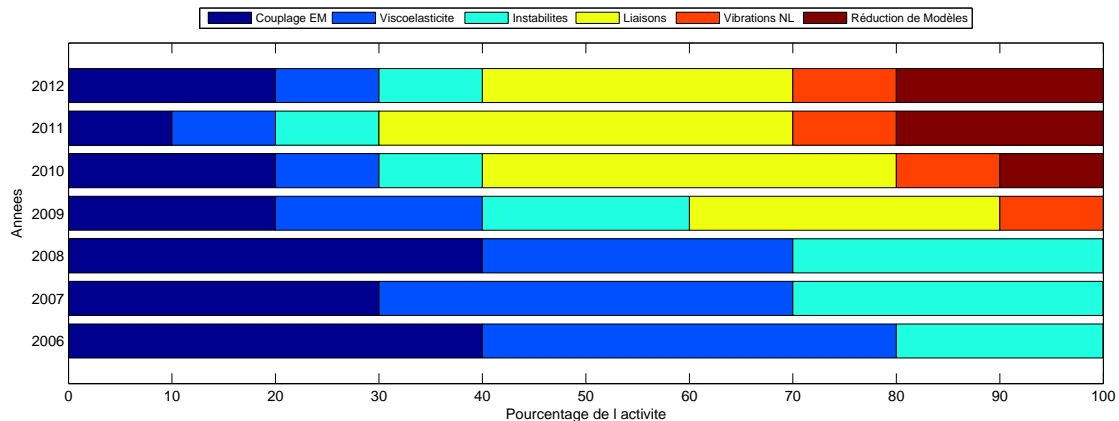


FIGURE 1 – Chronogramme de mon activité de recherche axe par axe

## Couplages électromécaniques

Cet axe, actif depuis 2002, au LISMMA porte sur la conception de structures "intelligentes", c'est à dire incluant des éléments piézoélectriques. La première ambition de ces travaux étaient d'étudier la possibilité d'**amortir les vibrations mécaniques** grâce à un circuit de shunt, [Revue 5]. Un indicateur de performance, le **Couplage Électromécanique Effectif**, a alors été développé. Mes premiers travaux dans ce projet ont été de mettre en place des expériences destinées à valider les modèles analytiques et numériques développés par différents doctorants. L'équipe s'est ensuite concentrée sur la détermination du **Coefficient de Couplage Électromécanique** dans différentes situations : vibrations libres et forcées, [Revue 3 et 4] puis plus récemment dans des configurations statiques, paradoxalement plus complexes à étudier. Les travaux ont également eu vocation à explorer des applications concernant des structures d'accueil métalliques, composites

multi-couches et NIDA et également des éléments piézoélectriques de diverses natures : Céramiques, MFC, stacks. Cet axe de recherche a largement irradié mes autres axes de recherche dans lesquels les composants piézoélectriques ont également été utilisés comme capteurs ou actionneurs pour la conception d'un viscoanalyseur ou encore la mise en place de procédures d'excitation vibratoires originales.

**Acteurs :** Julie Ranger (2002-2007), Salma Ghorbel (2005-2009), Ayech Benjeddou (2002-), Pelin BERIK (2010-), Gaël Chevallier (2006-).

**Financement :** Projet Européen CASSEM, Financement Autrichien ACCM.

## Comportements viscoélastiques

L'étude des **comportements viscoélastiques** est pratiquement inévitable lorsqu'on aborde le sujet de l'**amortissement des vibrations** tant ces matériaux sont utilisés dans les applications pratiques. Par ailleurs ces matériaux relèvent de comportements complexes, sans jeu de mots, faisant apparaître des dépendances à de nombreux phénomènes physiques et ont été historiquement très étudiés au LISMM. Dans cet axe, une attention particulière a été portée ces dernières années à intégrer au mieux les étapes de caractérisation, identification d'un comportement et simulation. Le comportement viscoélastique linéaire et dépendant de la fréquence, dans la bande de fréquence [100Hz - 10000Hz] est difficile d'accès par les moyens de caractérisation classiques, [Com 24 et Brevet 2]. Des méthodes originales d'identification de la rhéologie ont été proposées, [Revue 9 et 10]. Enfin par analogie avec la formulation *Anelastic Displacement Fields*, une méthode a été développée pour la simulation en mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis [Com 21]. Ces contributions permettent de couvrir les dimensions essais et simulations indispensables en ingénierie.

**Acteurs :** Franck Renaud (2006-), Imad Tawfiq (2006-), Jean-Luc Dion (1995-), Gaël Chevallier (2006-).

**Financement :** Contrat de Recherche BOSCH-Systèmes de freinage, Projet MAIAS - Pôle de compétitivité ASTECH.

## Instabilités provoquées par le frottement

Les instabilités vibratoires provoquées par le frottement sec entre deux pièces sont encore assez mal comprises. Après avoir étudié ces vibrations en basse fréquence, un partenariat avec le fabricant de systèmes de freinage BOSCH a été l'opportunité de travailler sur les vibrations hautes fréquences, [Revue 7]. Ce problème a été largement étudié par de nombreux laboratoires, toutefois les dispositifs technologiques à mettre en oeuvre pour **amortir le crissement** n'ont pas encore fait l'objet de publication significative. Ces travaux ont eu l'ambition de caractériser expérimentalement le crissement de frein du point de vue cinématique [Revue 15] et d'étudier quel est le rôle effectif des éléments viscoélastiques dans le crissement de frein avec l'aide de la simulation numérique [Revue 14].

**Acteurs :** Laurent Levy (2006), Franck Renaud (2006-), Sylvain Thouviot (2007), Hugo Festjens (2010), Imad Tawfiq (2006-), Jean-Luc Dion (1995-), Gaël Chevallier (2006-).

**Financement :** Contrat de Recherche BOSCH-Systèmes de freinage.

## Amortissement dans les liaisons

Le frottement sec peut permettre de dissiper une partie de l'énergie vibratoire par glissement partiel entre les surfaces d'une liaison mécanique. La mise en oeuvre de ce type d'amortissement est intéressante lorsque les dispositifs classiques, viscoélastiques par exemple, sont inopérants. La conception de structures exploitant ce phénomène est toutefois complexe parce que le comportement local des liaisons est difficile à observer. Les premiers travaux avaient donc pour but l'observation et la caractérisation expérimentale de l'amortissement dans différentes situations, [Revue 8] et [Revue 12]. Un projet financé par le pôle de compétitivité ASTECH permet actuellement d'explorer d'autres sujets tels que les méthodes de conception ou l'usure des liaisons amortissantes. Dans ce cadre particulier, une méthode originale de caractérisation numérique de la rhéologie d'une liaison boulonnée a été présentée dans différents colloques, [Com 26, 27, 28]

**Acteurs :** Nicolas Peyret (2009-), Imad Tawfiq (2010-), Hugo Festjens (2010-), Jean-Luc Dion (2006-), Gaël

---

Chevallier (2009-).

**Financement :** Projet MAIAS - Pôle de compétitivité ASTECH.

## Vibrations non-linéaires

Certains phénomènes vibratoires ne peuvent être expliqués qu'en ayant recours à des théories plus évoluées que le simple cadre des vibrations linéaires. Des efforts particuliers ont été fournis pour modéliser ou identifier les comportements non-linéaires tels que le frottement, cf [Revue 1], les chocs, notamment dans les engrenages, cf [Revue 6]. les efforts de coupe pendant l'usinage, cf [Revue 2]. Le développement d'absorbeurs de vibrations non-linéaires est également un sujet en train d'émerger au laboratoire qui a donné lieu à un stage de recherche en 2012 pour lequel les résultats ne sont pas encore publiés. Les sujets précédents, Amortissement dans les liaisons et Instabilités provoquées par le frottement alimentent aussi cette thématique plus fondamentale.

**Acteurs :** Amir Kessentini (2009), Alain Rivière (2009), Jean-Luc Dion (2009-), Gaël Chevallier (2009-).

**Financement :** Fonds propres.

## Réduction des Modèles

L'étude des vibrations ne nécessite pas de modèles à grand nombre de degrés de liberté ; toutefois le lien entre la géométrie détaillée et les paramètres vibratoires, Fréquences propres, amortissements, masses modales, n'est en général réalisable que grâce à l'apport des méthodes numériques, en particulier la méthode des éléments finis. Celle-ci génère des modèles à grand nombre de degrés de liberté. La réduction des modèles est un moyen de lier automatiquement les modèles réduits pour l'étude des vibrations avec les modèles détaillés. Ces méthodes étaient exploitées dans différents projets sans qu'un projet de recherche spécifique ne soit créé. Récemment, avec les problématiques de couplages mécatroniques, deux projets industriels ont émergé. Leur but est de développer des méthodes de réduction de modèles efficaces pour les problèmes de thermique et d'électromagnétique, [Com 25]. Une partie des méthodes classiques de réduction de modèles ont été détournées vers ces physiques mais certaines spécificités, les comportements non-linéaires, le caractère localisé des sollicitations, ont nécessité le développement de méthodes différentes proches des méthodes d'identification : Enrichissement, Proper Orthogonal Decomposition, Filtrage de Kalman.

**Acteurs :** Frédéric Da Silva (2010-), Fatma Abid (2011-), Jean-Luc Dion (2010-), Gaël Chevallier (2010-).

**Financement :** CIFRE Renault et CIFRE Valéo.

## Publications

### Articles publiés dans des revues avec comité de lecture

- [1] G. Chevallier, F. Macewko, and F. Robbe-Valloire. Dynamic friction evolution during transient sliding. In *Transient Processes in Tribology*, volume 43, pages 537–543. Elsevier, 2003.
- [2] A. Kessentini, G. Chevallier, J. Louati, A. Riviere, and M. Haddar. F.E.M. of the drilling machine-tool including the giroscopic effect. *Advances in Production Engineering and Management*, 2(63-78), 2007.
- [3] G Chevallier, S Ghorbel, and A Benjeddou. A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures. *Smart Materials and Structures*, 17(6) :065007, December 2008.
- [4] G Chevallier and A. Benjeddou. Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques composites. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, 19(3) :339–364, 2009.
- [5] G. Chevallier, S. Ghorbel, and A. Benjeddou. Piezoceramic shunted damping concept : testing, modelling and correlation. *Mécanique & Industries*, 10(5) :397–411, November 2009.
- [6] J.-L. Dion, S. Le Moyne, G. Chevallier, and H. Sebbah. Gear impacts and idle gear noise : Experimental study and non-linear dynamic model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(8) :2608–2628, 2009.

- [7] S. Thouviot, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Dynamic computation of braking systems including viscoelastic behaviours. *Mécanique & Industries*, 10(5) :385–396, November 2009.
- [8] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Micro-slip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02 :281, 2010.
- [9] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. An identification method for the modelling of damping by the generalised maxwell model. *Mécanique & Industries*, 11(1) :47–55, June 2010.
- [10] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, and R. Lemaire. A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized maxwell model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :991–1010, April 2011.
- [11] J.-L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 00 :000, 2012.
- [12] J.-L. Dion, I. Tawfiq, and G. Chevallier. Harmonic component detection : Optimized spectral kurtosis for operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 26 :24–33, January 2012.
- [13] H. Festjens, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study. *Applied Acoustics*, 73(11) :1121–1128, November 2012.
- [14] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion, and G. Taudiere. Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, August 2012.
- [15] J.-L. Dion, G. Chevallier, O. Penas, and F. Renaud. A new multicontact tribometer for deterministic dynamic friction identification. *Wear*, 300(1-2) :126–135, 2013.
- [16] Jean-Luc Dion, Cyrille Stephan, Gaël Chevallier, and Hugo Festjens. Tracking and removing modulated sinusoidal components : A solution based on the kurtosis and the extended kalman filter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [17] Hugo Festjens, Gaël Chevallier, and Jean-luc Dion. A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013.

## Brevets

- [1] M. Arnaud, R. Besset, G. Chevallier, O. Jacky, B. Larrouy, M. Poirson, J.-L. Dion, and F. Renaud. Transmission hydraulique pour bicyclettes, 07 2012.
- [2] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Viscoanalyseur à haute fréquence avec précharge axiale, 07 2012.

## Communications dans des conférences

- [1] G. Chevallier, P. Ruiz, and D. Le Nizerhy. Etude de la stabilité d’un système d’embrayage. Lyon, France, 2004.
- [2] G. Chevallier, D. Le Nizerhy, F. Robbe-Valloire, and F. Macewko. Chattering instabilities : study of a clutch system. Paris, 2005. EUROODYN.
- [3] G. Chevallier and D. Le Nizerhy. Friction induced vibrations in a clutch system. consequences on the apparent friction torque. Lisbon (Portugal), 2006. European Congress on Computational Mechanics.

- 
- [4] G. Chevallier, J.-A. Ranger, A Benjeddou, and H. Sebbah. Passive vibration damping using resistively shunted piezoceramics : An experimental performance evaluation. Monastir, Tunisia, 2007. Congrès International en Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques.
  - [5] G. Chevallier, S. Thouviot, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Prise en compte des comportements viscoélastiques dans la simulation dynamique des systèmes de freinage. Rabat (Maroc), 2007. CPI.
  - [6] G. Chevallier, S. Thouviot, F. Renaud, and J.-L. Dion. A numerical method to take into account the damping induced by viscoelastic materials in brake squeal. Venice (Italy), 2008. World Congress on Computational Mechanics.
  - [7] J.-L. Dion, G. Chevallier, and S. Le Moyne. Gear shocks : non linear dynamic model and parametric identification. Venice (Italy), 2008. World Congress on Computational Mechanics.
  - [8] S. Ghorbel, G. Chevallier, and A. Benjeddou. Détermination expérimentale et numérique du coefficient de couplage électromécanique généralisé de structures piézoélectriques. Lyon, France, 2008. Colloque Vibrations, Chocs et Bruits.
  - [9] A. Kessentini, G Chevallier, J. Louati, A. Riviere, and M. Haddar. Etude théorique et expérimentale du comportement dynamique du système m-o-p en perçage. Lyon, France, 2008.
  - [10] N. Peyret, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Analysis of the non linear dynamic behaviour of an assembly. Determination of the friction-induced damping. Venice (Italy), 2008. World Congress on Computational Mechanics.
  - [11] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement. Lyon (France), 2008. Colloque Vibrations, Chocs et Bruits.
  - [12] A Benjeddou, S. Ghorbel, and G. Chevallier. On 2d plane strain/stress vibration analysis of piezoelectric structures. Hammamet, Tunisia, 2009. Congrès International en Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques.
  - [13] A. Benjeddou, S. Ghorbel, and G. Chevallier. On approximate evaluations of the modal effective electromechanical coupling coefficient. Marrakech, Maroc, 2009. Congrès Marocain de Mécanique.
  - [14] G. Chevallier and A. Benjeddou. Numerical and experimental evaluations of the modal effective electromechanical coupling coefficient. Vernon, France, 2009. Third International Symposium on Design Modelling and Experiments of Adaptive Structures and Smart Systems.
  - [15] G. Chevallier, F. Renaud, and J.-L. Dion. Viscoelastic damping effect on brake squeal noise. volume 2009. ASME IDETC, 2009.
  - [16] J. L. Dion, G. Chevallier, O. Penas, and N. Peyret. A new test bench for friction measurements and the evolution of the lugre model to the frozen model. ASME IDETC, 2009.
  - [17] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Non linear dynamic behaviour modelling of a planar friction interface in a structure assembly. San-Diego, USA, 2009. ASME IDETC.
  - [18] F. Renaud, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Impact de la viscoélasticité sur les modes instables des systèmes de freinage. Marseille, France, 2009. Congrès Français de Mécanique.
  - [19] N. Peyret, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Energy dissipation in an assembly with planar contact. Lyon, France, 2010. Colloque Vibrations, Chocs et Bruit.
  - [20] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Mouvement d'une plaquette lors d'un crissement de frein. Lyon, France, 2010. Colloque Vibrations, Chocs et Bruits.

- [21] G. Chevallier, F. Renaud, S. Thouviot, and J.-L. Dion. Complex eigenvalue analysis for structures with viscoelastic behavior. Washington DC, 2011. ASME IDETC.
- [22] J.-L. Dion, N. Chevallier, G. and Peyret, F. Renaud, and H. Festjens. Optimization of the spectral kurtosis for harmonic component detection. Washington DC (USA), 2011. ASME IDETC.
- [23] N. Peyret, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Energy dissipation by micro-slip in an assembly, analytic and experimental approach. Washington DC (USA), 2011. ASME IDETC.
- [24] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Viscoelasticity measurement and identification of viscoelastic parametric models. Washington DC, 2011. ASME IDETC.
- [25] F. Da Silva, G. Chevallier, R. Plateaux, M. Saeli, and J.-L. Dion. Reduced basis for thermal model reduction of electronic power device. Sao Paulo (Brazil), 2012. World Congress on Computational Mechanics.
- [26] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Numerical investigations on modal microsliding dissipations in built-up structures. New-York, USA, 2012. Internoise.
- [27] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Numerical investigations on modal microsliding dissipations in built-up structures. Paris, France, 2012. Colloque Vibrations, chocs et Bruit.
- [28] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-L. Dion. A numerical quasi-static method for the identification of frictional dissipation in bolted joints. Chicago, USA, 2012. ASME IDETC.
- [29] G Chevallier, H Festjens, F Renaud, and J-L Dion. Pressure measurement sensor for jointed structures. In *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, pages 383–388. Springer, 2013.
- [30] F Abid, G Chevallier, JL Blanchard, JL Dion, and N Dauchez. System identification using kalman filters. In *Topics in Modal Analysis, Volume 7*, pages 561–573. Springer, 2014.

## Participation à la Formation des futurs chercheurs

La formation doctorale inclut l’encadrement des doctorants et la participation aux jurys de thèse mais également l’encadrement des projets et stages de recherche de Mastère.

### Encadrement de thèses

- **Julie RANGER**  
Titre de la thèse : Amortissement passif des vibrations par patchs piézocéramiques shuntés.  
Thèse soutenue en 2007, Qualifiée en Section CNU 60, actuellement PRAG U-Paris X, Publications communes : 1, Encadrement 20%.
- **Amir KESSENTINI, cotutelle**  
Titre de la thèse : Modélisation du comportement dynamique non-linéaire d’un système complexe machine-outil-pièce.  
Thèse soutenue en 2008, actuellement Enseignant-Chercheur, Publications communes : 2, Encadrement 10%.
- **Salma GHORBEL**  
Titre de la thèse : Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations et simulations.  
Thèse soutenue en 2009, actuellement ingénieur R&D, Publications communes : 4, Encadrement 30%.
- **Hédi YANGUI, cotutelle**  
Titre de la thèse : Modélisation du comportement dynamique non linéaire d’un système machine-outil-pièce lors d’une opération de fraisage.  
Thèse soutenue en 2011, actuellement assistant ENI Sfax (Tunisie), Publications communes : 1, Encadrement 10%.

---

- **Franck RENAUD**

Titre de la thèse : Etude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilités vibratoires des systèmes de freinage.

Thèse soutenue en 2011, Qualifié en Section CNU 60, actuellement Post-Doc LISMMA, Publications communes : 8, Encadrement 50%.

- **Nicolas PEYRET**

Titre de la thèse : Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique.

Thèse en cours, Publications communes : 5, Encadrement 50%

- **Frédéric DA SILVA**

Titre de la thèse : Réduction de modèle 3D/1D pour l'optimisation multiphysique d'un système de traction électrique.

Thèse en cours, Publications communes : 1, Encadrement 50%

- **Hugo FESTJENS**

Titre de la thèse : Contribution à la modélisation et à la caractérisation expérimentale de l'amortissement dans les structures assemblées.

Thèse en cours, Publications communes : 3, Encadrement 50%

- **Frédéric ABLITZER**

Titre de la thèse : Influence des paramètres mécaniques et géométriques sur le comportement statique de l'archet de violon en situation de jeu.

Examineur de la thèse soutenue le 05/12/2011

- **Fatma ABID**

Titre de la thèse : Réduction de modèles non-linéaires couplés Electro-Thermo-Hydrauliques pour la simulation de machines électriques et de modules électroniques de puissance.

Thèse en cours, Publications communes : 1, Encadrement 50%

- **Pelin BERIK, cotutelle**

Titre de la thèse : New piezo-composite actuators : innovations by design.

Thèse en cours, Encadrement 10%

## Thèses Rapportées

- **Daniela CRISAFULLI**

Titre de la thèse : Advanced Modelling of multi-layered composites and functionally graded structures by means of unified formulation.

Thèse soutenue en 2013, Université Paris X.

- **Thomas MIRAS**

Titre de la thèse : Effets de la viscosité et de la capillarité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique contenant un liquide incompressible.

Thèse soutenue en 2013, CNAM.

## Encadrement de projets et de stages de fin d'études

Cette partie ne reprend que les encadrements de stages ou projets ayant donné lieu à publication.

- **Pablo RUIZ**

Titre du Stage : Etude de la stabilité d'un système d'embrayage.

Soutenu en 2004, actuellement ingénieur R&D, publications communes : 1, Encadrement 50%.

- **Laurent LEVY**

Titre du Stage : Etude des dispositifs de contrôle passif du crissement de frein.

Soutenu en 2006, actuellement ingénieur R&D, publications communes : 1, Encadrement 50%.

- **Sylvain THOUVIOT**

Titre du stage : Prise en Compte des comportements viscoélastique dans les simulations du crissement de frein.



Soutenu en 2008, actuellement ingénieur R&D, publications communes : 3, Encadrement 50%.

– **Hugo FESTJENS**

Titre du stage : Efficacité des dispositifs d'amortissement pour prévenir le crissement de frein.

Soutenu en 2010, actuellement doctorant, Publications communes : 1, Encadrement 50%.

## Perspectives de recherche

Pour résumer, mon activité de recherche actuelle porte sur l'"amortissement des vibrations". Plusieurs pistes ont été explorées : amortissement par conversion électromécanique, par frottement, grâce à des matériaux viscoélastiques. Ma contribution porte sur la caractérisation, l'identification et la modélisation pour la simulation numérique. La réduction de modèles est un outil pour faire le lien entre des modèles géométriquement détaillés et des modèles à faible nombre de variables d'observation, utiles pour l'identification et la corrélation essais/calculs.

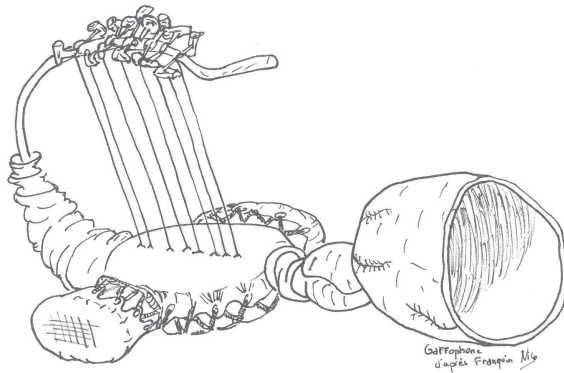
La thématique "Amortissement" restera un axe fort dans mon activité de recherche pendant les années à venir. L'étude des sources d'"amortissement ou d'absorption vibratoire" régies par des phénomènes non-linéaires devient prépondérante tant les chocs, le frottement, l'effet de la pré-charge en viscoélasticité sont des voies encore mal connues. L'investissement dans la connaissance d'autres physiques, électromagnétique, piézoélectricité, thermique devra servir à améliorer le réalisme des modèles utilisés mais également à élargir ces travaux vers le contrôle actif ou réactif des vibrations. A court terme, il est envisagé d'utiliser les actionneurs piézoélectriques ou électromagnétiques pour modifier la pré-charge des liaisons mécaniques dans le but de maximiser la dissipation d'énergie sur un cycle de vibrations, voir les travaux de L. Gaul par exemple. Suivant une idée voisine, les absorbeurs de vibrations non-linéaires semblent prometteurs en terme de performances. Cependant leur fonctionnement est parfois instable lorsqu'ils sont passifs. L'apport d'une énergie externe ou la modification des paramètres de fonctionnement, via un actionneur piézoélectrique, semble pouvoir permettre de remédier à ces instabilités et également d'élargir sa gamme de fonctionnement.

J'envisage également de démarrer des travaux plus méthodologiques pour développer des outils d'aide à la décision pour les ingénieurs en simulation. En effet, la quantité de données d'entrée et les incertitudes associées à ces données font que les résultats visés sont parfois eux même entachés d'erreurs très importantes. Dès lors, des modèles inutilement sophistiqués sont parfois développés pour compenser ces écarts avec l'expérience. A l'inverse, il est parfois difficile de décider : quelle physique intégrer aux modèles ? Les couplages sont-ils forts ou faibles ? Est-il opportun de linéariser les modèles ? Lorsque des résultats sont obtenus, il est également difficile de décider quelles modifications apporter au système étudié pour optimiser son fonctionnement. Cette difficulté est généralement liée à la nécessité d'effectuer les bons post-traitements sur les résultats. A cette fin, les méthodes de traitement du signal statistiques ou spectrales peuvent être d'une grande aide.

# Chapitre 1

## Introduction

*Une vibration du tonnerre avec une résonance maximale !*  
Gaston Lagaffe en parlant du Gaffophone (1967)



### Résumé du Chapitre

Dans cette partie, le contexte en ingénierie ainsi que les motivations à entreprendre une recherche sur l'amortissement en dynamique des structures sont présentés. Le cœur de ce chapitre contient une synthèse des modèles d'amortissement disponibles dans la littérature tant du point de vue rhéologique que du point de vue des modèles détaillés. Les définitions utiles dans la suite du manuscrit sont exposées pour les modèles linéaires et non-linéaires. Enfin, comme sujet connexe, une partie est axée sur la réduction de modèles.

## 1.1 Contexte

Les paramètres généraux contrôlant la réponse dynamique d'un système sont l'inertie, la rigidité et l'amortissement. Dans le cadre des vibrations linéaires, la masse et la rigidité du système se déduisent assez facilement des données de géométrie et des matériaux constituant les composants du système. Les équations de la mécanique des milieux continus et les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles et des équations différentielles ordinaires sont pour cela d'une grande aide. La conception d'une structure repose généralement sur la définition d'une géométrie et un choix de matériaux *a priori*. Les paramètres géométriques conduisent à la définition d'un **prototype numérique** de la structure constitué de matériaux pour lesquels une **rhéologie locale** (aussi appelée loi de comportement) est identifiée grâce à des **essais de caractérisation**. Les simulations effectuées sur le modèle détaillé de la structure peuvent permettre de construire, par des techniques de **réduction de modèles**, un modèle simplifié destiné à produire une réponse vibratoire dans le domaine fréquentiel ou temporel. Des essais sur un **prototype réel** permettent d'identifier un modèle simplifié grâce aux outils d'**analyse modale**. Les résultats obtenus sont comparés aux critères de conception pour éventuellement remettre en cause les choix initiaux. Il faut ensuite "rejouer" le processus jusqu'à obtention d'une conception satisfaisante, voir figure 1.1.

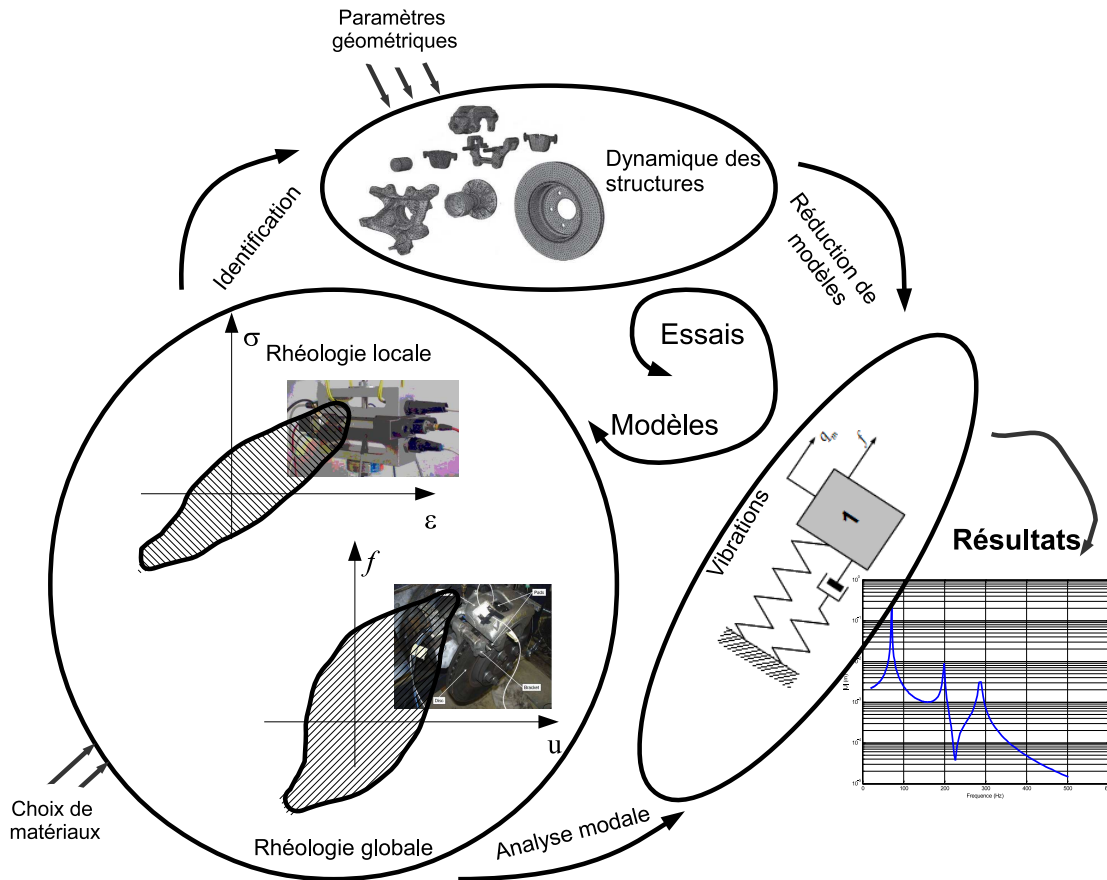


FIGURE 1.1 – Relations entre les champs disciplinaires : Rhéologie, Dynamique des structures et Vibrations. Position des méthodes d'identification, d'analyse modale et de réduction de modèles dans un processus conduisant au calcul de la réponse dynamique d'un système. Les photos présentées sont relatives aux travaux sur le crissement de frein mais pourraient s'appliquer aux autres travaux présentés dans ce mémoire.

## 1.2 Motivations

L'étude des vibrations mécaniques est un sujet ancien et le lecteur peut légitimement se demander s'il existe encore des progrès à réaliser dans ce domaine. Toutefois, les comportements non-linéaires induits par les grandes amplitudes de sollicitations des matériaux, par la cinématique et les grandes rotations en particulier, par les contacts entre pièces sont une source de complexité importante et font actuellement l'objet de nombreux travaux. D'autre part l'amortissement, c'est à dire la dissipation de l'énergie vibratoire par différents moyens (frottement, conversion énergétique, matériaux dissipatifs) reste un champ d'investigation encore relativement mal exploré.

Le premier enjeu est de mieux savoir **prédire l'amortissement effectif** des structures pour l'intégrer dans les modèles simplifiés. En effet, il existe depuis longtemps des propositions pour prendre en compte l'amortissement dans les modèles, mais il s'agit souvent uniquement d'ajuster les résultats *a posteriori* et non réellement de prédire l'amortissement à partir des données de conception. Par ailleurs, les techniques d'essais de caractérisation se sont beaucoup plus focalisées sur les termes de rigidité et de masse que sur l'amortissement. Il est pourtant capital de connaître l'amortissement pour pouvoir prédire convenablement les amplitudes vibratoires d'une structure. En effet, une mauvaise estimation de l'amortissement peut conduire au sous ou au sur-dimensionnement. Cette conséquence est accentuée par la sensibilité importante des niveaux vibratoires aux fréquences proches de la résonance. La figure 1.2 illustre le propos sur des résultats de simulations pour une excitation par choc ou par signal aléatoire comparés à des gabarits imposés par une norme. Le critère de succès à un test de qualification est le non-dépassement du gabarit. Une incertitude sur l'amortissement de l'ordre de 20% se traduit ici par un écart de plus de 100% sur les niveaux simulés proches des résonances, conduisant à une erreur sur la satisfaction du critère de réussite imposé par le gabarit. La prédiction et la mesure précise de l'amortissement et les méthodes permettant d'y arriver sont deux objectifs des travaux menés ces dernières années au LISMMA. Tous les chapitres de ce mémoire traitent de ce problème.

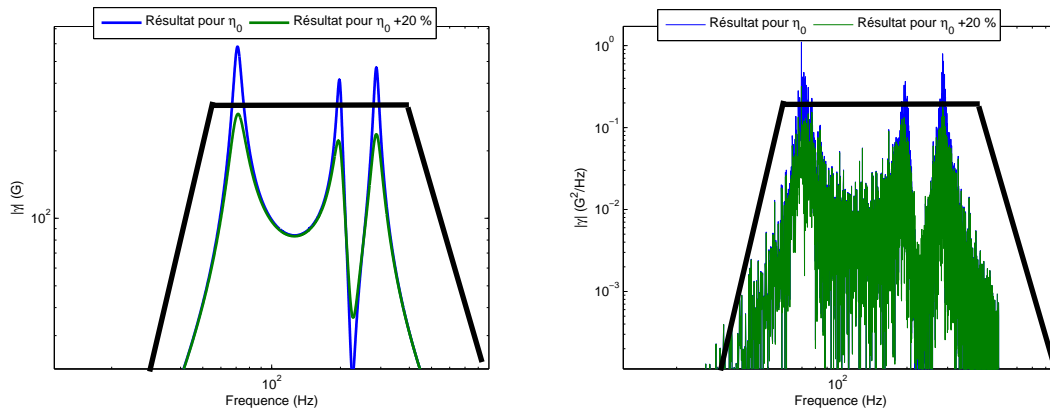


FIGURE 1.2 – Réponse simulée d'un système sous excitation au choc (gauche) en  $G$  et sous excitation aléatoire (droite) en  $G^2/Hz$ . Une simulation est effectuée avec un amortissement  $\eta_0$  (bleu). La sensibilité de la réponse à cette valeur d'amortissement est ensuite explorée en lui ajoutant 20% (vert). Le trapèze noir est le gabarit de validation du test.

Le deuxième enjeu est de proposer des **solutions technologiques** permettant d'atténuer le niveau vibratoire des structures en maximisant l'amortissement dans toutes les conditions environnementales. La technologie la plus utilisée repose sur l'utilisation de matériaux de la famille des caoutchoucs ou des polymères de synthèse aux fortes capacités amortissantes. Les chapitres 3 et 4 portent sur l'utilisation de ces matériaux. Des alternatives technologiques à l'utilisation de ces matériaux existent ; elles présentent un grand intérêt, notamment lorsque les conditions de températures, très élevées ou très basses, excluent l'utilisation des matériaux polymères. Le premier chapitre de ce mémoire traite de l'utilisation des matériaux piézoélectriques

pour la conversion d'énergie et de la dissipation dans un circuit électrique. Le quatrième chapitre porte sur la dissipation par frottement sec dans les liaisons mécaniques. Ce mode de dissipation est peu sensible aux conditions environnementales mais malheureusement difficile à mettre au point, ce qui justifie ces travaux. La capacité amortissante de ces différentes solutions technologiques est illustrée sur la figure 1.3 ; ce graphe dresse qualitativement les niveaux d'amortissement atteignables en fonction de la température. A partir de ce graphe, notons que les structures fonctionnant en basses températures (domaines aéronautique et spatial) de même que dans des conditions de hautes températures (domaine des moteurs, de la production d'énergie, du freinage) sont très difficiles à amortir.

Précisons au lecteur qu'atténuer les vibrations ne passe pas obligatoirement par la mise en place d'un dispositif amortissant. Ainsi, le juste accordage des fréquences propres peut permettre d'éviter les phénomènes de résonance et les fortes amplitudes qui leurs sont associées. L'utilisation du phénomène d'anti-résonance, et plus largement de l'absorption dynamique linéaire ou non-linéaire par des dispositifs appelés étouffeurs, les batteurs ou NES<sup>1</sup> permet un transfert de l'énergie vibratoire vers d'autres modes et une atténuation dans une bande de fréquence ciblée. Enfin l'isolation vibratoire exploite l'effet de l'inertie pour réduire les vibrations au delà de la bande de fréquence qui contient les fréquences de résonances ; les suspensions de toutes sortes exploitent ce phénomène. **Ce mémoire ne traite pas de ces dispositifs et se concentre uniquement sur l'amortissement.**

Dans ce mémoire, et plus généralement dans les travaux effectués ces dernières années au LISMMA, un soin particulier a été porté à aborder tous les aspects que requiert l'étude des vibrations de structures : caractérisation des propriétés des matériaux, choix d'une rhéologie et identification, simulation numérique, essais de validation. Nous pensons, en effet, que ces différents aspects sont fortement couplés, au point que les dispositifs d'essai de caractérisation ou la rhéologie doivent être choisis et mis au point en tenant compte des contraintes de la simulation numérique ; de même que la simulation numérique doit autant que possible pouvoir être adaptée à la complexité des phénomènes physiques.

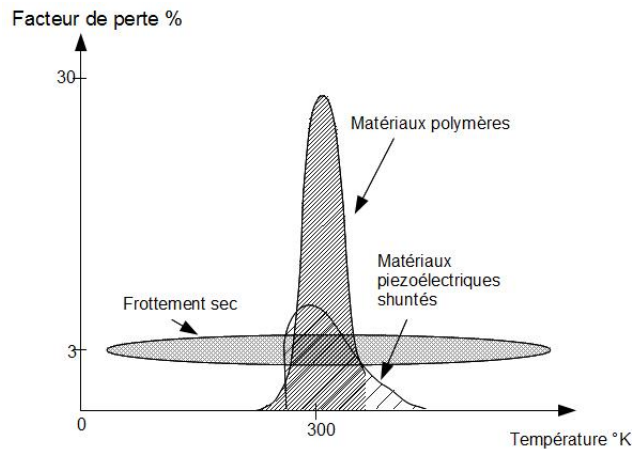


FIGURE 1.3 – Cartographie des performances en terme d'amortissement pour différentes familles de matériaux en fonction de la température.

### 1.3 Principes généraux sur les rhéologies amortissantes

Pour **amortir** les vibrations mécaniques, au sens premier du terme, il faut dissiper l'énergie vibratoire en la convertissant en chaleur. D'un point de vue thermodynamique, on peut montrer qu'à un dispositif amortissant peut être associé un potentiel de dissipation  $\varphi$  qui doit satisfaire l'inégalité de Clausius-Duhem,

1. Non Linear Energy Sink, Absorbeurs non-linéaires

c'est à dire le premier et le second principe de la thermodynamique, voir Lemaitre et al.<sup>2</sup> pour plus de détails, soit :

$$\varphi\left(\dot{\mathbf{S}}^d, \dot{V}_k, \frac{\vec{q}}{T}\right) = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{S}}^d - A_k \dot{V}_k - \vec{g} \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad (1.1)$$

Cette relation un peu abstraite a le mérite de faire apparaître les grandeurs fondamentales associées à l'amortissement, soient :

- $\dot{\mathbf{S}}^d$ , le tenseur des vitesses de déformations liées à la dissipation d'énergie, c'est à dire toutes celles qui ne sont pas réversibles ; ces grandeurs sont supposées observables, cependant il est en général difficile de séparer les déformations réversibles des déformations irréversibles dans une mesure.
- $\dot{V}_k$  désigne la dérivée de la  $k^{ieme}$  variable d'état interne fort utile pour décrire certains phénomènes que seules les variables observables ne permettent pas de qualifier ; ces grandeurs ne sont en général pas observables directement.
- $T$  est la température, indissociable de la dissipation d'énergie.  $\frac{\vec{q}}{T}$  désigne le flux de chaleur dans le solide considéré. Ces grandeurs, la température en particulier, sont, en général, observables et mesurables.

Reprenons la terminologie proposée par J. Lemaitre et al. : les variables  $\mathbf{T}$ ,  $A_k$  et  $\vec{g} = gradT$  sont des variables de "forces" tandis que les variables  $\dot{\mathbf{S}}^d$ ,  $\dot{V}_k$  et  $\frac{\vec{q}}{T}$  sont des variables de "flux". Ce contexte général permet de définir des fonctions représentant la force de dissipation ou la puissance dissipée en fonction des variables de flux. Pour les comportements dans lesquels la variable de force dépend linéairement de la variable de flux, l'admissibilité thermodynamique impose que les paramètres qui lient les deux variables soient positifs.

Dans la pratique, nous chercherons à utiliser les potentiels énergétiques, et les forces de dissipation qui leurs sont associées, qui satisfont le meilleur compromis entre **la représentativité expérimentale, la possibilité d'être identifié et la simplicité d'utilisation en modélisation**. Pour mettre en évidence la dissipation d'énergie, l'usage est de post-traiter les essais de caractérisation dans un plan reliant la force observable au flux observable, soit par exemple pour une rhéologie locale :  $T_{11} = f(S_{11})$  dans un essai de traction. La figure 1.4 expose deux comportements typiques linéaire et non-linéaire avec seuil capables de produire une dissipation d'énergie. Dans ce plan, l'énergie dissipée est définie comme le cumul de puissance dissipée sur la durée du cycle, l'aire inscrite dans un cycle force-déplacement est, dans le cas de la figure 1.4, la somme des travaux élémentaires  $T_{11}dS_{11}$  sur un cycle, soit :

$$W_d = \oint \varphi dt = \oint f du = \oint T_{11} dS_{11} \quad (1.2)$$

Dans les travaux décrits dans ce mémoire, nous ne ferons pratiquement pas mention de la température, ce qui revient à considérer les transformations isothermes, autrement dit que l'élévation de température est faible dans le volume de la structure. Cette hypothèse est raisonnable, si l'on considère le fait que l'énergie vibratoire est en général très faible, les structures suffisamment refroidies et surtout que les constantes de temps thermiques sont très grandes devant les constantes de temps en dynamique des structures ; autrement dit, **la configuration thermique peut être considérée comme statique devant la configuration mécanique** ; du coup, la température intervient comme un paramètre plutôt qu'une variable.

Dans la suite nous distinguons les modèles linéaires, c'est à dire parfaitement décrits par une fonction de transfert, des modèles non-linéaires.

### 1.3.1 Modélisation paramétrique linéaire

Les modèles linéaires permettent de lier linéairement les termes de force et de flux. Si l'on reprend l'exemple de la figure 1.4, la contrainte est liée à l'histoire de la déformation par la relation suivante, dans laquelle  $T_{11}$  est égale au produit de convolution de  $h$ , la fonction de relaxation, par la déformation  $S_{11}$ .

$$T_{11}(t) = \int_0^t h(t - \tau) S_{11}(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

2. J. Lemaitre et J.-L. Chaboche Mécanique des Matériaux Solides, 1996

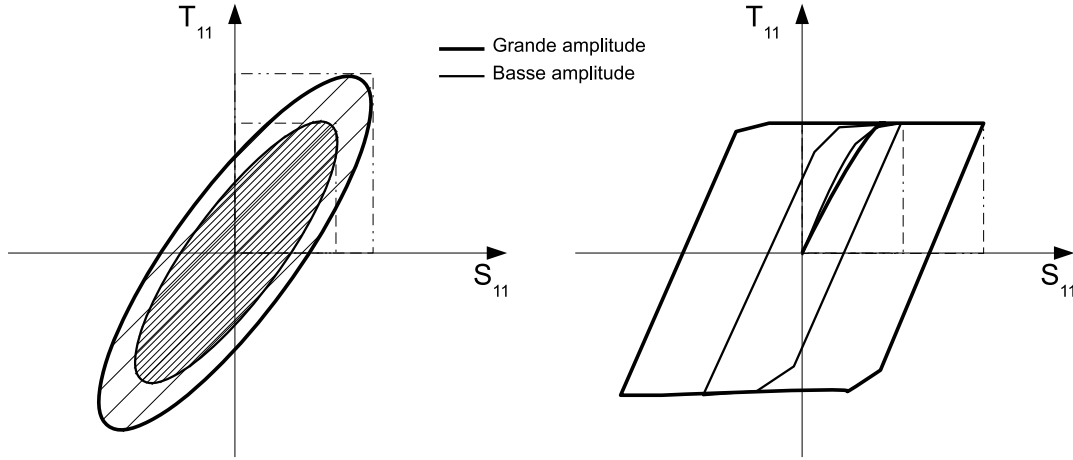


FIGURE 1.4 – Deux exemples schématiques de ce que peut produire un essai : à gauche, trajectoire elliptique régulière associée à un comportement linéaire ; à droite, comportement symptomatique de ce que peut produire le frottement ou la plasticité, donc un comportement non-linéaire avec seuil. L'aire inscrite dans les cycles constitue l'énergie dissipée.

Référence figure 1.6	Domaine Fréquentiel	Module de stockage et facteur de perte	Domaine temporel
(a) Kelvin-Voigt	$\hat{T}_{11} = (k + cs)\hat{S}_{11}$	$ H  = k\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}$ et $\eta = \tau\omega = c/k\omega$	$T_{11} = kS_{11} + c\dot{S}_{11}$
(b) Structural	$\hat{T}_{11} = k(1 + i\eta)\hat{S}_{11}$	$ H  = k\sqrt{1 + \eta^2}$ et $\eta$ est une constante	/
(c) Zener	$\hat{T}_{11} = k\left(1 + \frac{\alpha_1\tau_1 s}{\tau_1 s + 1}\right)\hat{S}_{11}$ avec $\alpha_1 = \frac{k_1}{k}$ et $\tau_1 = \frac{c_1}{k_1}$	voir figure 1.5	$T_{11} = kS_{11} + \alpha_1 \frac{dV_1}{dt}$ $\tau_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 = \tau_1 S_{11}$
(e) Maxwell généralisé	$\hat{T}_{11} = k\left(1 + \sum_i \frac{\alpha_i\tau_i s}{\tau_i s + 1}\right)\hat{S}_{11}$ avec $\alpha_i = \frac{k_i}{k}$ et $\tau_i = \frac{c_i}{k_i}$	voir figure 1.5	$T_{11} = kS_{11} + \sum_i \alpha_i \frac{dV_i}{dt}$ $\tau_i \frac{dV_i}{dt} + V_i = \tau_i S_{11}$

TABLE 1.1 – Tableau de synthèse des rhéologies linéaires pour les milieux solides.

La transformée de Laplace de l'écriture précédente permet de montrer l'existence d'une fonction complexe  $H(s)$  équivalente à un "module d'élasticité". Dans cette écriture,  $H$  peut dépendre de la fréquence, mais reste indépendante de l'amplitude des sollicitations, traduction de la linéarité, postulée ci-dessus.

$$\hat{T}_{11}(s) = H(s)\hat{S}_{11}(s) \quad (1.4)$$

Parmi les rhéologies élémentaires, les modèles décrits par la figure 1.6 sont couramment utilisés. Pour ces rhéologies, la variable cinématique est  $S_{11}$  tandis que la variable de force est  $T_{11}$ , voir figure 1.6 (a). Des variables internes sont nécessaires pour traduire les comportements obtenus. Notons que, dans le domaine fréquentiel, ces variables internes ne sont pas nécessaires. Globalement, tous ces modèles peuvent se mettre sous la forme d'un produit entre un module statique  $H_0$  et une fonction complexe caractérisée par un **facteur de perte**  $\eta$  plus ou moins dépendant de la fréquence.

$$H(s) = H_0 (1 + i\eta(\omega)) \quad (1.5)$$

Le fait de pouvoir séparer le module  $H_0$  traduit le principe d'équivalence entre élasticité et viscoélasticité, voir

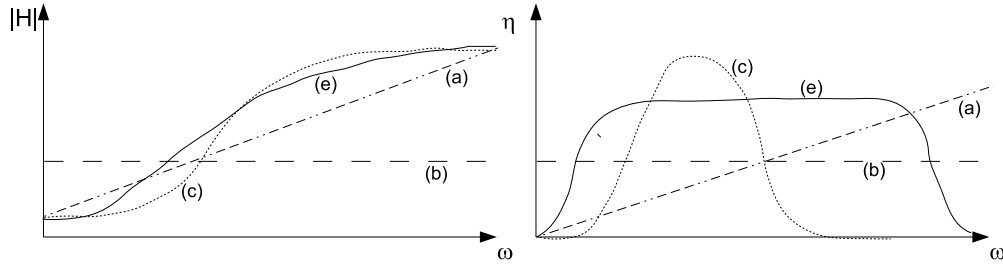


FIGURE 1.5 – Représentation des modules de stockage et facteur de pertes en fonction de la fréquence de sollicitation. (a) Kelvin Voigt, (b) Module complexe, (c) Solide viscoélastique standard ou Zener, (d) Maxwell Généralisé.

Salençon<sup>3</sup>. La littérature définit également un **module de stockage** qui traduit la dépendance de la rigidité à la fréquence des sollicitations et qui, mathématiquement, est le module de la fonction  $H$ . Le tableau 1.1 fait une synthèse de tous ces modèles. La plupart de ces modèles permettent de traduire une dépendance du module de stockage et du facteur de perte à la fréquence des sollicitations. Cette dépendance est fréquemment observée notamment pour les matériaux viscoélastiques. L'utilisation de ces modèles est globalement liée à la largeur de la bande de fréquence qui est visée. Les modèles généralisés (d) et (e) sont ceux qui permettent une utilisation sur la bande de fréquence la plus large. Les modèles à dérivées fractionnaires (e) ne sont pas présentés dans ce mémoire. Retenons simplement qu'ils permettent de traduire des comportements proches de ce que permettent les modèles à fractions rationnelles d'ordres élevés (d), mais avec moins de paramètres, ce qui facilite l'identification. Retenons également qu'ils sont plus compliqués à utiliser dans le domaine temporel sauf à considérer des exposants rationnels, voir par exemple S. Sorrentino et al.<sup>4</sup>.

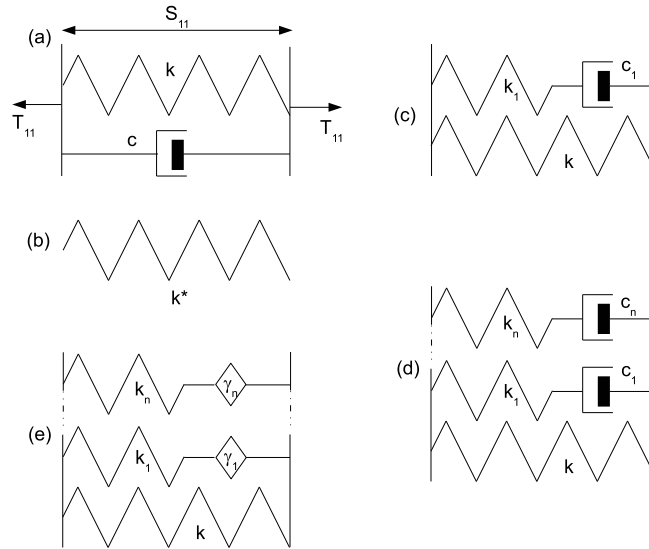


FIGURE 1.6 – Représentation des rhéologies décrivant les solides dissipatifs à comportement linéaire. (a) Kelvin Voigt (b) Module complexe ou amortissement structural ou hystérétique (c) Solide viscoélastique standard ou Zener (d) Maxwell Généralisé ou modèles à fractions rationnelles d'ordre élevé (e) Dérivée fractionnaire généralisée.

Le tableau 1.1 et la figure 1.5 montrent l'étendue fréquentielle que peuvent couvrir les modèles. Ainsi le

3. Salençon - Viscoélasticité pour le calcul des structures - <http://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT15572.pdf>

4. Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models, JSV, 2007



modèle (a) possède un facteur de perte et un module de stockage qui croissent avec la fréquence. Ce type de comportement est peu représentatif des cas réels mais reste utilisable sur une bande étroite de fréquence. Le modèle (b) ne dépend pas de la fréquence mais peut être utile en première approximation sur une large bande de fréquence ou pour des phénomènes non-dépendants de la fréquence comme le frottement. Le modèle (c) est exploitable sur une bande fréquence plus large, même si il conduit à des exagérations sur le facteur de perte lorsque cette bande est trop large. Le tableau 1.1, colonne 4, montre clairement que les variables  $S_{11}$  et  $T_{11}$  observables expérimentalement ne suffisent pas forcément pour exprimer les modèles dans le domaine temporel. Des variables additionnelles  $V_i$  sont ajoutées, ce qui évidemment pose problème tant en modélisation qu'en identification. Notons que les modèles de Maxwell et l'amortisseur visqueux seul, figure 1.7, ne peuvent pas être utilisés comme des rhéologies pour des "solides" puisqu'ils ne comportent pas de rigidité statique. Ils peuvent cependant être utiles comme "briques" de construction pour d'autres modèles. Notons également que les modèles non-paramétriques, dans lesquels la dépendance en fréquence est exprimée de manière tabulaire peuvent répondre à certains besoins en simulation. Ce point est traité dans la section suivante.

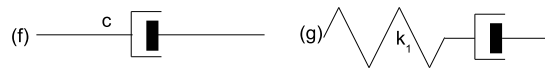


FIGURE 1.7 – Représentation des rhéologies décrivant les fluides dissipatifs à comportement linéaire. (f) Amortisseur Visqueux (g) Maxwell.

### 1.3.2 Equivalence Temps - Température

Comme indiqué dans la partie précédente, l'amortissement, et, en général, le comportement de certains matériaux est influencé par les facteurs environnementaux comme la température. Ainsi, un matériau viscoélastique peut se comporter comme un solide élastique à basse température; il ne produit alors qu'un amortissement très faible. Dans la phase de transition vitreuse, sa rigidité baisse et il produit un maximum de dissipation. Dans une phase intermédiaire, son comportement se stabilise, tant en terme de rigidité que d'amortissement. Enfin sa rigidité chute à haute température, lorsque son comportement s'approche de celui d'un fluide. La notion de plage de température est intimement liée au matériau considéré; ainsi à une même température un matériau pourra se trouver en phase de transition vitreuse, alors qu'un autre est encore en phase solide. Technologiquement, la phase la plus intéressante est la transition vitreuse, puisqu'elle est la phase dans laquelle le matériau possède les plus grandes capacités amortissantes. Dans cette plage de comportement, il s'avère qu'une variation de température produit globalement un effet inverse à ce que produirait une variation de la fréquence. Il est donc possible d'établir que la fonction de transfert du matériau dépendant de la température et de la fréquence ne dépend finalement que d'une fréquence "réduite"  $\alpha(T)\omega$ , voir équation ci-dessous. Outre la simplification que cela génère en terme de modélisation, les fabricants de viscoanalyseur exploitent largement cette équivalence pour extrapoler les essais de caractérisation effectués en basse fréquence, sur une large bande de fréquence. Ces essais sont ensuite représentés sur un nomogramme tel que celui du matériau 3M 110 présenté sur la figure 1.8.

$$H(\omega, T) = H(\alpha(T)\omega) \quad (1.6)$$

Malheureusement ce type d'équivalence ne fonctionne bien que pour les polymères homogènes; elle est beaucoup moins pertinente pour les composites. C'est l'une des raisons pour lesquelles, le moyen d'essai présenté dans le chapitre 3 n'exploite pas ce principe.

### 1.3.3 Mesure de l'amortissement

La mesure de l'amortissement et de la rhéologie des matériaux est difficile. Un soin particulier doit être porté à ne pas polluer la mesure par la présence d'autres sources d'amortissement. Les amortissements faibles sont particulièrement délicats à déterminer : les effets aérodynamiques, les liaisons avec les capteurs, la

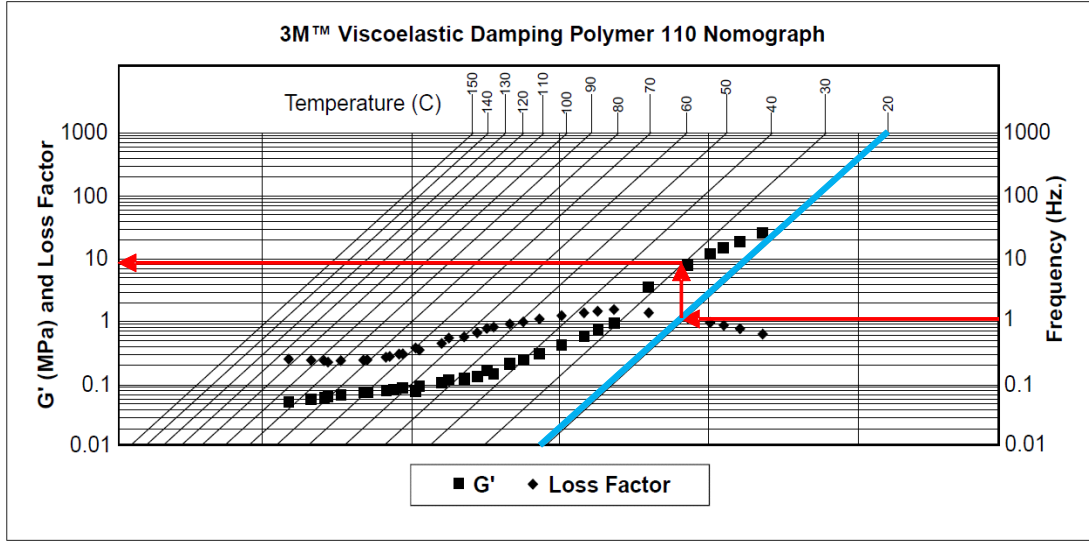


FIGURE 1.8 – Nomogramme du matériau 3M 110 et principe de lecture de ce type de diagramme, ici pour le module de stockage. En bleu l'isotherme à 20°, à droite la fréquence d'excitation, donnée d'entrée et à gauche la double échelle pour le module de stockage et facteur de pertes.

structure environnante, l'excitateur sont susceptibles de produire un amortissement supérieur à celui de la structure ou du matériau.

La première catégorie de méthodes de caractérisation est ce qu'il convient d'appeler la catégorie des "méthodes indirectes". Dans cette famille de méthodes, il s'agit de produire expérimentalement une réponse dynamique de la structure d'essai. Puis en postulant un modèle détaillé de la structure, basé sur les équations de la mécanique de milieux continus, on cherche à identifier par méthode inverse quels sont les paramètres qui gouvernent l'amortissement. Le modèle peut-être analytique lorsque la structure d'essai est simple, poutre ou plaque, ou numérique (généralement par la méthode des éléments finis). La méthode d'Oberst est certainement la plus célèbre parmi ces méthodes indirectes. Dans cette méthode, la structure d'essai est une poutre encastrée libre, constituée d'une ou plusieurs couches de matériaux amortissants et de deux ou davantage de couches de matériaux structurels, généralement métalliques. L'essai est décrit selon les préconisations de la norme ASTM E756<sup>5</sup> par la figure 1.9. En général l'excitateur est piloté par un signal aléatoire dont la densité de probabilité couvre un spectre assez large pour que plusieurs modes soient excités. Autour de chaque mode  $i$ , le mouvement est régi par l'équation classique suivante :

$$(-\omega^2 + \tilde{\omega}_{0i}^2 (1 + i\tilde{\eta}_i)) u_i = f_i \quad (1.7)$$

A partir de la mesure cinématique et de la mesure de la force, une fonction de transfert est calculée et tracée dans le domaine fréquentiel. La mesure de la bande passante autour de chaque mode permet ensuite d'établir la valeur du facteur de perte modal mesuré  $\tilde{\eta}_i$  à la fréquence de résonance et de déduire  $\tilde{\omega}_{0i}$ , voir figure 1.9. Le facteur de perte obtenu est alors le facteur de perte effectif de la structure, qui n'est pas celui du matériau puisque la structure est hétérogène. Pour déterminer les paramètres du matériau, il faut postuler un modèle de la structure, dans lequel on prend soin de séparer les comportements du domaine viscoélastique  $\Omega_v$  des données du domaine élastique  $\Omega_e$ . On peut factoriser les paramètres du matériau viscoélastique puisque le domaine viscoélastique est homogène. Les équations peuvent être celles de l'élastodynamique 3D comme ici ou celles d'une théorie des poutres ou des plaques.

$$-\omega^2 \int_{\Omega} \rho U(x) \delta U dV + \int_{\Omega_e} T : \delta S dV + E_v (1 + i\eta) \int_{\Omega_v} \bar{T} : \delta S dV = \int_{\Gamma_f} f \delta U dS \quad (1.8)$$

5. Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials, 2010

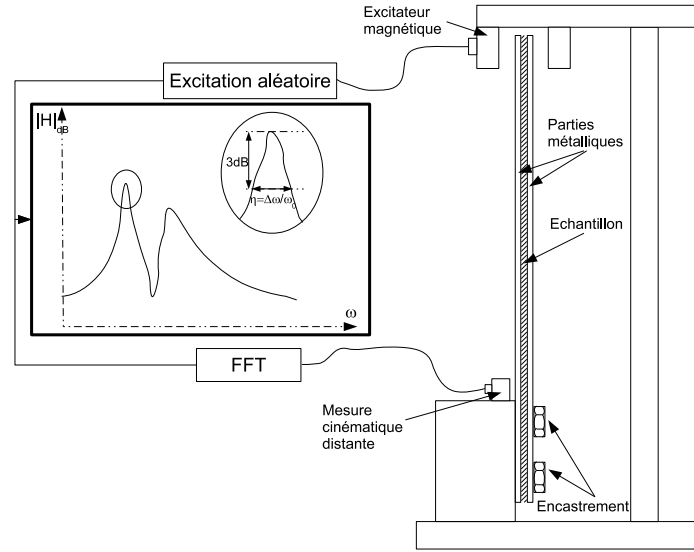


FIGURE 1.9 – Schéma du montage de l'essai de Oberst également préconisé par la norme américaine ASTM E756

Pour déterminer  $\eta$  et  $E$ , il est nécessaire de connaître une base de modes propres. Cette base peut être postulée puis mise à jour itérativement, au fur et à mesure de la détermination des paramètres matériaux, soit recalée sur l'essai si l'on dispose de plusieurs capteurs. On pose alors :  $U = \Phi_i u_i$ , ce qui revient à considérer qu'autour de la fréquence du mode, le déplacement est colinéaire au mode.  $\Phi_i$  est normalisé par rapport à l'opérateur d'inertie. L'équation obtenue est alors de la forme :

$$(-\omega^2 + k_{ei} + E_v \overline{k_{vi}} (1 + i\eta_i)) u_i = f_i \quad (1.9)$$

Il suffit alors d'identifier termes à termes les deux équations pour obtenir une valeur de  $E_v$  et  $\eta$  autour de la fréquence de chaque mode. Il est possible d'obtenir plus de points sur les courbes maîtresses en modifiant la géométrie de l'éprouvette ou plus simplement en modifiant la position de l'encastrement. Dans la mesure où l'excitation est aléatoire et le post-traitement est basé sur le calcul d'une fonction de transfert, ce protocole est bien adapté à la mesure des rhéologies linéaires. Cependant, la structure de test peut être excitée avec un signal harmonique dont les paramètres, fréquence et amplitude, sont modifiés pas à pas pour produire une cartographie de la dépendance de l'amortissement avec la fréquence et l'amplitude de l'excitation. Cette démarche permet de caractériser des comportements non-linéaires.

La mesure de la bande passante autour d'un mode est une méthode de détermination de l'amortissement qui est très sensible à la précision que l'on est capable d'accorder au relevé de la largeur de bande. On montre qu'il est particulièrement difficile d'identifier les amortissements faibles parce que l'erreur relative commise sur l'amortissement est directement proportionnelle à la résolution fréquentielle si l'on suppose que le niveau "-3 dB" est correctement déterminé. Autrement dit, plus l'amortissement est faible, plus la résolution fréquentielle doit être bonne. Par ailleurs la détermination du niveau -3dB est elle-même largement conditionnée par la résolution fréquentielle. Pour les amortissements faibles, on préférera l'analyse de la décroissance d'un signal harmonique lors d'une réponse libre combinée à la méthode des décréments logarithmiques ou à la transformée de Hilbert, qui donnent une bien meilleure précision. Pour obtenir le régime libre d'une structure, trois possibilités s'offrent à l'expérimentateur :

- un choc au marteau instrumenté. Ce protocole produit une excitation à large bande et donc un signal relativement riche qu'il faut filtrer. Le filtrage occasionne parfois des artefacts qui polluent un peu la mesure.
- un échelon négatif à partir d'une position déformée statique peut également être utilisé. Cette méthode présente l'avantage de produire un signal dont le contenu fréquentiel est essentiellement concentré sur

la basse fréquence. Il demande généralement quand même une opération de filtrage.

- une appropriation interrompue à la fréquence propre d'un des modes. Cette méthode présente l'avantage de produire des signaux mono-fréquentiel et donc de ne nécessiter aucun filtrage.

Lorsque l'amortissement est faible mais le comportement est linéaire, les trois approches permettent d'obtenir de bons résultats. Par contre, en présence de comportements non-linéaires, la fréquence évolue avec l'amplitude des oscillations, les "modes" sont généralement couplés, donc la troisième approche est la plus fiable. Ce point particulier est discuté dans le Chapitre 5.

La deuxième catégorie de méthodes de caractérisation est une méthode "directe" qui est très proche des méthodes de mesure quasi-statique, dans la mesure où l'on essaie de produire une excitation située dans une bande de fréquence éloignée des comportements modaux. Les termes inertiels n'entrent alors pas en ligne de compte et la connaissance de la force appliquée et de la cinématique mesurée permet de déterminer complètement la rhéologie. Les dispositifs expérimentaux capables de produire ce type d'essai sont des viscoanalyseurs. Ils fonctionnent sous ambiance thermique contrôlée et l'excitation qu'ils produisent est généralement asservie en terme de fréquence et d'amplitude. Les trois paramètres, Température, Fréquence et Amplitude sont donc connus, on cherche à déterminer une rigidité et un facteur de perte associé. La bande de fréquence d'utilisation de ce type d'appareil va en général de quelques dixièmes de Hertz et approche le kilo Hertz. Les amplitudes cinématiques vont d'un micromètre à quelques millimètres. Les montages expérimentaux permettent de réaliser des essais dans différents modes de sollicitation : traction, flexion, cisaillement ou torsion. Le fait que l'excitation soit harmonique permet de traiter des comportements non-linéaires, voir figure 1.10. L'amélioration de ce type de moyen d'essai est développée dans le Chapitre 3.

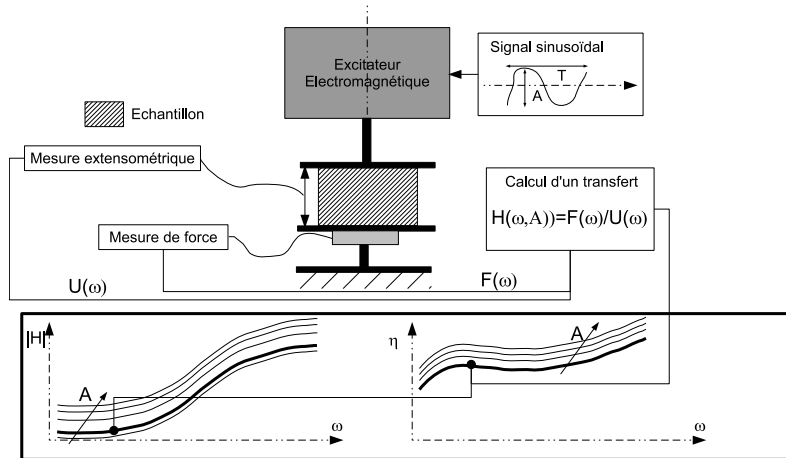


FIGURE 1.10 – Schéma de principe d'un viscoanalyseur

### 1.3.4 Modélisation paramétrique non-linéaire

Lorsque la dissipation d'énergie provient d'autres phénomènes physiques, elle ne peut pas toujours être modélisée par une fonction linéaire par rapport à l'amplitude des sollicitations. Ceci a pour conséquence directe le fait qu'il ne devient plus possible de représenter exactement le lien entre la force de dissipation et la variable cinématique par une fonction de transfert puisque le rapport sortie/entrée dépend de l'amplitude. Le cas des dissipations obtenues par frottement sec entre les solides est particulièrement intéressant dans la mesure où il est simple à réaliser technologiquement ; en effet presque toutes les liaisons font intervenir des contacts mécaniques entre les pièces. Dans les liaisons, **à une échelle locale**, la caractéristique contrainte / déformation est gouvernée par le modèle de Coulomb dans la direction tangentielle et de Signorini dans la direction normale. Ces modèles peuvent être utilisés dans une formulation locale pour une résolution par la méthode des éléments finis. Cependant à l'échelle des vibrations, cette approche est coûteuse et peut avantageusement être complétée par une approche plus globale, dans laquelle des modèles hystérétiques qui

intègrent des effets locaux sans les détailler sont utilisés. Pour un système à un degré de liberté, l'équation générale est celle-ci :

$$m\ddot{u} + F(u, v) = f(t) \quad (1.10)$$

Dans cette équation,  $u$  est le déplacement modal ou la coordonnée généralisée, tandis que  $v$  est une variable interne du modèle. Il y en a éventuellement plusieurs !  $F(u, v)$  est la force de rappel qui inclut les effets réversibles et les effets non-réversibles.  $f(t)$  est l'excitation. Lorsque c'est possible  $F(u, v)$  pourra être séparée en  $F = F_e + F_d$  où  $F_e$  est la force de rappel élastique et  $F_d$  est la force de dissipation.

Lorsque la dissipation provient du frottement, la base de la modélisation repose pratiquement sur le modèle de Amontons-Coulomb qui distingue deux phases : l'adhérence et le glissement. Pendant la phase d'adhérence, la contrainte de frottement est tangentielle et est inférieure au produit de la contrainte normale et du coefficient de frottement, qui est un paramètre intrinsèque à la paire de matériaux, aux états des surfaces en contact, etc. Cependant dans les modèles globaux, des glissements partiels sont pris en compte, une cinématique est donc possible avant le seuil de glissement total. Pendant la phase de glissement, la contrainte de frottement est égale au produit de la contrainte normale et du coefficient de frottement et est opposée à la vitesse de glissement. On dit qu'elle s'oppose au mouvement, d'où son caractère dissipatif. Pour reproduire ce type de comportement par la modélisation, ce sont les modèles traduisant le frottement sec ou la plasticité qui sont les plus pertinents. La littérature compte un nombre impressionnant de modèles dédiés à la dissipation et à l'hystérésis au sens large. Il est inutile d'essayer d'en faire un catalogue, nous nous contentons de citer deux des plus utilisés, le modèle de Bouc-Wen<sup>6</sup> et le modèle de Dahl<sup>7</sup>. Nous décrivons le modèle de Dahl en séparant la force de rappel dissipative :

$$F_d(u, v) = \sigma v \quad (1.11)$$

L'équation qui gouverne la dynamique de l'état interne est faite pour gérer la phase de glissement partiel. Ensuite lorsque le glissement total est atteint, la variable interne n'évolue plus.

$$\dot{v} = \sigma \left( 1 + \frac{v}{v_c} \text{sign}(\dot{u}) \right)^\alpha \dot{u} \quad (1.12)$$

Dans le modèle de Bouc-Wen, l'usage est d'exprimer la force de rappel dans sa totalité, force élastique comprise. Sa structure est celle d'un modèle élasto-plastique dans lequel le paramètre  $a$  représente le ratio entre la rigidité de l'écrouissage et la rigidité élastique.

$$F(u, v) = aku + (1 - a)kv \quad (1.13)$$

L'équation qui gouverne la dynamique de l'état interne est plus sophistiquée que pour le modèle de Dahl. Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $n$  permettent d'obtenir des cycles de forme très particulière, ce qui en fait un modèle plus générique que le modèle Dahl mais aussi plus difficile à identifier, voir figure 1.11.

$$\dot{v}(t) = \alpha \dot{u} - \beta v |\dot{u}| |v|^{n-1} - \gamma \dot{u} |v|^n \quad (1.14)$$

L'utilisation de ces modèles dans le domaine fréquentiel est impossible du fait de la difficulté à appliquer la transformée de Laplace ou de Fourier à des expressions non-linéaires. Il est toutefois possible de déterminer l'énergie dissipée équivalente. Considérons que  $U$  est harmonique et que la force de dissipation est le produit de la rigidité complexe  $jk$  et du facteur de perte  $\eta$  dans le domaine fréquentiel. On montre que si la force de dissipation exprimée dans le domaine fréquentiel est impaire par rapport à l'axe des fréquences, la force de dissipation est déphasée de  $\pi/2$  par rapport au déplacement, soit :

$$u = \sin(\bar{\omega}t) \text{ et } F_d = k\eta \cos(\bar{\omega}t) \quad (1.15)$$

L'énergie dissipée peut alors s'écrire :

$$W_d = \oint F_d du = \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} k\eta \bar{\omega} u_0^2 \sin^2(\bar{\omega}t) dt = k\eta \pi u_0^2 \quad (1.16)$$

---

6. Modèle mathématique d'hystérésis : application aux systèmes à un degré de liberté, Acustica 1971

7. A solid friction model, the aerospace corporation, 1968. <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADA041920>

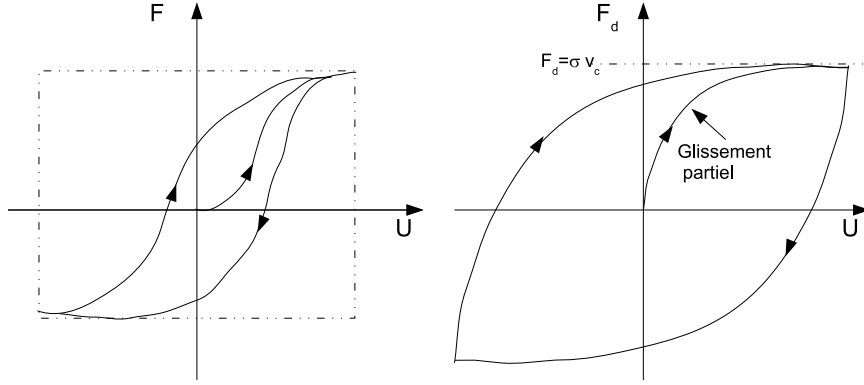


FIGURE 1.11 – Comparaison graphique des modèles de Bouc-Wen (gauche) et de Dahl (Droite)

L'expression ainsi obtenue est généralisée en considérant que l'énergie de déformation élastique vaut  $2W_e = ku_0^2$ . Du coup, le facteur de perte est défini comme le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie déformation élastique.

$$\eta = \frac{W_d}{2\pi W_e} \quad (1.17)$$

La dernière relation est obtenue en considérant que la force de rappel élastique est linéaire de même que la force de dissipation. Nous pouvons toutefois étendre cette relation à des cas non-linéaires. Faire cette hypothèse revient à chercher, figure 1.4, quelle est l'ellipse, figure 1.4 de gauche, qui couvre la même aire que le cycle hystérétique, figure 1.4 de droite, tout en atteignant le même niveau de force de rappel et de déplacement. Mathématiquement, l'énergie dissipée est la somme, sur un cycle, du travail élémentaire de la force de dissipation sur le champ de déplacement, voir équation 1.2. On définit alors un facteur de pertes dépendant de l'amplitude :

$$\eta(u_0) = \frac{\oint F_d(u) du}{2\pi W_e} \quad (1.18)$$

Cette définition est intéressante à double titre ; d'abord parce que le facteur de perte est un terme relativement facile à identifier à partir d'une expérience. Un exemple est donné dans le Chapitre 5. Ensuite parce que cette définition peut-être utilisée pour simuler le comportement dynamique de systèmes non-linéaires en régime permanent en tronquant la solution à la première harmonique.

Numériquement la détermination de l'énergie dissipée peut-être assez coûteuse. D'une part, il faut simuler un 5/4 de cycles pour calculer l'aire du cycle si l'on part de conditions initiales nulles comme sur la figure 1.11. D'autre part, pour déterminer la dépendance du facteur de pertes à l'amplitude, il faut effectuer autant de simulations à amplitude de cycle imposé que l'on souhaite de points sur la caractéristique facteur de pertes en fonction de l'amplitude cinématique. Les règles de Masing<sup>8</sup> simplifient l'étude des cycles d'hystérésis en faisant l'hypothèse que le cycle complet peut être extrapolé à partir du premier chargement. Pour cela, il suffit que les charges et décharges du cycle puissent être déduites du premier chargement grâce à une homothétie. Les modèles de Dahl et Bouc Wen mais aussi d'Iwan lorsque la charge normale est constante satisfont globalement à ces règles. L'énergie dissipée peut donc être définie comme :

$$W_d(u) = \oint F_d du = 4 \int_0^u F_d(v) dv \quad (1.19)$$

Du coup à partir du calcul d'une seule charge, il est possible de calculer toute la dépendance de l'énergie dissipée à l'amplitude, voir figure 1.12.

8. Eiganspannungen und verfestigung beim messing. ASME, proc. ICAM, 1926

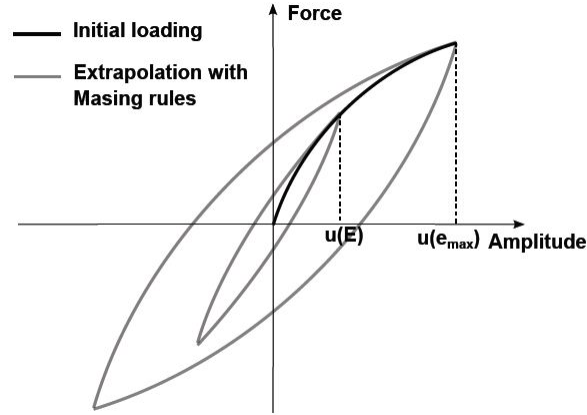


FIGURE 1.12 – Principe des règles de Masing. Le cycle complet est extrapolé à partir de la première charge. Figure extraite d'un article soumis par H. Festjens, G. Chevallier & J.L. Dion, 2012

## 1.4 Modélisation de l'amortissement en dynamique des structures

La question qui se pose dans cette section est celle de la portabilité des modèles rhéologiques dans les équations de la Mécanique des Milieux Continus, puis dans les méthodes numériques. Les contraintes sont différentes selon qu'il s'agisse de porter les modèles pour effectuer des simulations dans le domaine fréquentiel, d'extraire les modes propres, ou de calculer la réponse dans le domaine temporel. Les contraintes diffèrent également selon qu'il s'agisse de calculs linéaires ou non-linéaires.

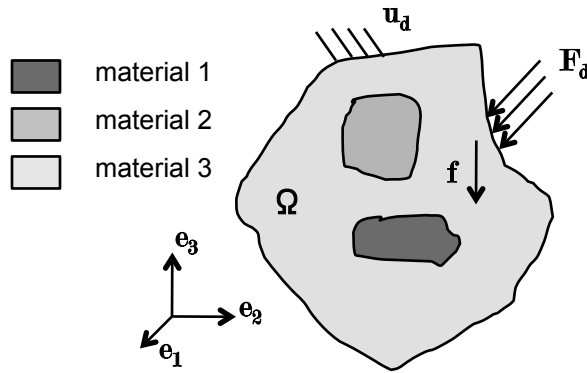


FIGURE 1.13 – Schéma d'une structure globalement hétérogène constituée de sous-domaines homogènes.

### 1.4.1 Comportements amortissants linéaires

Les modèles linéaires peuvent être portés dans les équations locales en considérant le principe d'équivalence entre élasticité et visco-élasticité et la séparation des domaines ; chaque sous-domaine étant considéré comme homogène, c'est à dire ayant un comportement ne dépendant pas des coordonnées géométriques. Considérant le fait que les matrices de rigidité de chaque sous-domaine dépendent linéairement de la loi de relaxation, il est possible de factoriser cette loi de relaxation, soit pour une structure comprenant  $N$  sous-domaines  $i$ , cf

figure 1.13 :

$$s^2 M \hat{U} + \sum_{i=1}^N H_i(s) K_i \hat{U} = \hat{F}(s) \quad (1.20)$$

Dans cette dernière,  $M$  désigne la matrice de masse globale et  $K_i$  les matrices de rigidité des domaines  $\Omega_i$ . Les fonctions  $H_i$  sont des fonctions de relaxation de chaque domaine  $\Omega_i$ . Cette séparation des termes peut se compliquer singulièrement si les domaines ne sont pas isotropes du point de vue de la relaxation. Si tel est le cas, il convient de séparer chaque direction de sollicitation et de lui associer sa propre fonction de relaxation. Certains auteurs ont par exemple déterminé des matériaux pour lesquels le module d'Young et le coefficient de Poisson ont des fonctions relaxation différentes, voir par exemple T. Pritz<sup>9</sup>.

Si l'on considère que la structure est constituée de deux matériaux, l'un élastique non-amortissant et l'autre viscoélastique, la formulation précédente peut se réduire à :

$$s^2 M \hat{U} + K_e \hat{U} + H(s) K_v \hat{U} = \hat{F}(s) \quad (1.21)$$

S'il s'agit de construire la fonction de réponse en fréquence de ce problème, il faut déterminer le champ de déplacement  $\hat{U}$  tel que l'équation précédente soit satisfaite. L'algorithme 1 permet de déterminer efficacement cette réponse. Les matrices de masse et de rigidité globales sont d'abord déterminées. Ensuite la matrice de rigidité dynamique est construite pour chaque fréquence à laquelle on souhaite évaluer la réponse. Une inversion du problème permet ensuite de déterminer le champ  $\hat{U}(s)$ . Dans cette démarche, il n'est pas nécessaire de disposer d'un modèle paramétrique de la fonction  $H$  ; des données tabulées peuvent tout à fait convenir.

---

**Algorithm 1** Calcul en réponse directe d'une structure viscoélastique

---

- 1: Construire les matrices  $M$ ,  $K_e$ ,  $K_v$  et le vecteur  $\hat{F}$
  - 2: **for**  $\omega = [0 \dots \omega_{max}]$  **do**
  - 3:   Evaluer  $H(\omega)$
  - 4:   Evaluer  $Z(\omega) = -\omega^2 M + K_e + H(\omega) K_v$
  - 5:   Calculer  $\hat{U} = Z(\omega)^{-1} \hat{F}$
  - 6: **end for**
- 

Si l'objectif est de déterminer les fréquences propres et les modes propres du problème précédent, il est nécessaire de reformuler le problème dans l'espace d'état. Il s'agit également définir a priori la fonction  $H(\omega)$ . Dans cette introduction, nous focalisons sur les modèles de type Maxwell Généralisé, soit :

$$s^2 M \hat{U} + K_e \hat{U} + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \tau_j s}{\tau_j s + 1} K_v \hat{U} = 0 \quad (1.22)$$

Dans laquelle les paramètres  $\alpha_j$  et  $\tau_j$  sont définis dans le tableau 1.1. Ce type de problème aux valeurs propres est difficile à résoudre. Certains auteurs ont fait des propositions pour le résoudre directement, voir par exemple Daya et Al.<sup>10</sup>. Dans ce mémoire, nous focalisons sur les approches basées sur une écriture d'état ; l'une des plus connues ayant été proposée par Lesieutre et al.<sup>11</sup>. Dans ce mémoire, l'écriture d'état utilisée est la suivante :

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(1)} &= s \hat{U} \\ \hat{U}^{(j+1)} &= \frac{\tau_j}{\tau_j s + 1} \hat{U}^{(1)} \\ s M \hat{U}^{(1)} + K_e \hat{U} + \sum_{j=1}^n \alpha_j K_v \hat{U}^{(j+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

---

9. The Poisson's loss factor of solid viscoelastic materials, JSV 2007

10. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures, Computers and Structures, 2001

11. Finite element modeling of one-dimensional viscoelastic structures using anelastic displacement fields, J. Guid. Contr. Dynam., 1996



A partir de cette définition, les matrices d'état suivantes sont construites :

$$s \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 I & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_n I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(1)} \\ \hat{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{U}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ -K_e & 0 & -\alpha_1 K_v & \cdots & -\alpha_1 K_v \\ 0 & \tau_1 I & -I & & \\ & \vdots & & -I & \\ 0 & \tau_n I & & & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(1)} \\ \hat{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{U}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

On reconnait là le problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{B}\Phi\mathbf{S} = \mathbf{A}\Phi \quad (1.25)$$

Dans lequel les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  sont définies dans le problème d'état 1.24,  $\Phi$  est la matrice des vecteurs propres et  $\mathbf{S}$  est la matrice diagonale des valeurs propres complexes dans laquelle la partie imaginaire représente la pulsation propre et le rapport partie réelle sur partie imaginaire représente le facteur de perte modal.

$$\begin{aligned} f_0 &\approx \frac{\Im(s)}{2\pi} \\ \eta &\approx 2 \frac{\Re(s)}{\Im(s)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ce type de modèle génère deux sortes de valeurs propres : certaines sont purement réelles et correspondent à des modes de relaxation, tandis que d'autres sont complexes et associées aux modes de vibrations. Les modes propres de vibrations sont réels si la structure est homogène, c'est à dire si, mathématiquement, la matrice  $K_v$  est proportionnelle à la matrice  $K_e$ . Autrement dit si la base qui diagonalise le problème conservatif, diagonalise également la matrice  $K_v$ . Si la structure n'est pas homogène, ce qui représente la majorité des cas en ingénierie, la matrice  $K_v$  n'est pas proportionnelle. Les modes propres sont alors complexes, ce qui signifie qu'ils ne sont plus stationnaires mais propagatifs.

Nous n'aborderons pas d'autres solutions pour porter les modèles locaux, comme les modèles GHM<sup>12</sup> qui permettent de conserver un modèle d'état d'ordre 2 avec une matrice de "masse" associée à tous les états pour résoudre les problèmes numériques ; la portabilité des modèles à dérivées fractionnaires à exposants rationnels n'est pas non-plus exposé ici. Pour une extraction de valeurs propres, l'algorithme suivant est appliqué :

---

**Algorithm 2** Calcul des valeurs propres complexes d'une structure

---

- 1: Construire les matrices  $M$ ,  $K_e$ ,  $K_v$
  - 2: Calculer les matrices d'état  $A$  et  $B$  selon l'équation 1.24
  - 3: Utiliser un solveur aux valeurs propres complexes pour calculer  $\Phi$  et  $\mathbf{S}$ , voir 1.25
  - 4: Trier les modes de relaxation et les modes de vibrations
  - 5: Evaluer  $f_0$  et  $\eta$  pour chaque mode de vibrations
- 

Dans la pratique, il est souvent difficile de calculer directement les modes complexes sur une structure présentant un grand nombre de degrés de liberté. Il est alors nécessaire de réduire le modèle. Ce point est discuté dans le Chapitre 3.

Dans le domaine temporel, la problématique est très semblable à celle qui a été rencontrée pour l'extraction des modes propres. Par ailleurs, nous avons fait remarquer que l'écriture temporelle d'une rhéologie amortissante nécessitait l'utilisation de variables internes ou variables d'état. L'écriture d'état utilisée dans le domaine fréquentiel est transformée par Transformée de Laplace inverse étant donné que les matrices  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de la variable  $s$ . Du coup, le problème s'écrit :

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \ddot{U} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U \\ \dot{U} \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Un calcul temporel est mis en oeuvre grâce à l'algorithme suivant :

---

12. Golla Hughes Mac Tavish models

**Algorithm 3** Simulation temporelle d'une structure viscoélastique

- 1: Construire les matrices  $M$ ,  $K_e$ ,  $K_v$  et le vecteur  $F(t)$
- 2: Calculer les matrices d'état  $A$  et  $B$  selon l'équation 1.24
- 3: Utiliser un solveur d'intégration des équations différentielles ordinaires pour déterminer  $U(t)$  à partir de l'équation 3

**1.4.2 Réduction de modèles**

Pour simuler la réponse dynamique d'un problème de grande taille, il est intéressant de considérer les méthodes de réduction de modèles. Pour la définition des bases de réduction de modèles, considérons le problème suivant :

$$M\ddot{U} + KU = F \quad (1.28)$$

Pour les modèles linéaires, le principe général de la réduction de modèles est d'approximer la solution en la décomposant sur un sous-espace de taille réduite par rapport à l'espace qui contient la solution exacte. On définit alors le champ solution réduit grâce au changement de base suivant :

$$U = \mathbf{P}_{N \times N_r} u \quad (1.29)$$

Dans lequel  $U$  est le vecteur qui contient le champ solution complet,  $u$  est le champ réduit et  $\mathbf{P}$  est la matrice de changement de base. Le problème passe alors de la dimension  $N$  à la dimension  $N_r$ .

$$\mathbf{P}^T M \mathbf{P} \ddot{u} + \mathbf{P}^T K \mathbf{P} u = \mathbf{P}^T F \quad (1.30)$$

La définition de la base  $\mathbf{P}$  a été particulièrement discutée dans la littérature. Une justification de ces modèles peut-être trouvée dans les articles de Guyan<sup>13</sup>, MacNeal<sup>14</sup>, Craig et Bampton<sup>15</sup>. Retenons les définitions suivantes qui couvrent une grande partie des utilisations classiques :

- pour travailler dans une bande passante réduite autour d'un mode de structure, il suffit de projeter la solution sur ce mode calculé à partir des opérateurs de masse et de rigidité tenant compte des conditions aux limites, soit :

$$\mathbf{P} = \phi_i \quad (1.31)$$

Lorsque l'objectif est de produire une synthèse de plusieurs modèles réduits par exemple dans le cas d'une structure constituée de plusieurs composants, chacun de ces composants est réduit sur l'une des bases suivante :

- l'approche la plus intuitive est d'utiliser la base de Guyan construite en condensant certains degrés de liberté. Pour cela il faut distinguer les degrés de liberté internes  $U_i$ , non-conservés, des degrés de liberté maitres  $U_m$ . La base est définie par :

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_m \end{bmatrix} = \mathbf{P} U_m = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ii}^{-1} K_{im} \end{bmatrix} U_m \quad (1.32)$$

- pour corriger la projection de l'opérateur de masse, il est possible d'adjoindre une base de modes à interfaces fixes, c'est la méthode Craig-Bampton.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{ii}^{-1} K_{im} & \phi_{1 \dots N} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

- une alternative est l'utilisation d'une base contenant les modes libres et la réponse statique aux chargements, c'est la base proposée par Mac Neal.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \phi_{1 \dots N} & K^{-1} F - \sum_1^N \frac{\phi_i^T F}{\omega_i^2} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

13. Reduction of Mass and Stiffness Matrices, AIAA Journal, 1965

14. A hybrid method of component mode synthesis, Computers and structures, 1971

15. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses, AIAA Journal, 1968

La réduction de modèle adaptée aux comportements dépendants de la fréquence, voir équation 1.21 est discutée dans le chapitre 3. Plus largement, la réduction de modèles appliqués à des cas d'analyse de stabilité pour des opérateurs non-symétriques ou pour les problèmes de thermique est présentée dans les Chapitres 4 et 6.

### 1.4.3 Amortissement modal

La notion d'amortissement modal résulte à la fois de la projection des opérateurs produisant la dissipation d'énergie sur une base modale et de l'identification de l'amortissement sur un essai d'analyse modale. Ainsi, on cherche à obtenir un système d'équations découplées dans le sous-espace engendré par les modes, soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \ddot{u} + \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_N \end{bmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} \omega^2_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega^2_N \end{bmatrix} u = f \quad (1.35)$$

Cette forme d'amortissement se trouve aussi dans la littérature sous la terme "Hypothèse de Basile". On montre que l'amortissement exprimé dans une base réduite est diagonal si l'opérateur exprimé dans la base des déplacements réels est de la forme :

$$C = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} M^{\alpha} K^{\beta} \quad (1.36)$$

On en déduit le modèle d'amortissement de Caughey :

$$C = \sum_{\alpha} a_{\alpha} M^{\alpha} + \sum_{\beta} a_{\beta} K^{\beta} \quad (1.37)$$

et l'amortissement proportionnel de Rayleigh :

$$C = aM + bK \quad (1.38)$$

Même si ces deux modèles sont largement utilisés dans les bureaux d'études, ils sont un peu simplistes pour prédire correctement l'amortissement réel des modes sur une large bande de fréquence. Ils produisent notamment une dépendance à la fréquence qui ne résulte pas d'une loi de comportement intrinsèque aux matériaux. Dans le cas où les matrices gouvernant l'amortissement visqueux ou structural ne sont pas proportionnelles, la matrice d'amortissement modal est pleine et les modes propres deviennent complexes.

### 1.4.4 Comportements amortissants non-linéaires

Les comportements dissipatifs amortissants tels que la plasticité ou le frottement décrit dans la partie précédente peuvent être mis en oeuvre localement dans un calcul non linéaire de structure qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$M\ddot{U} + KU + F_{NL}(U, \dot{U}) = F(t) \quad (1.39)$$

Ce type de simulation est relativement coûteux dans la mesure où elle se fait forcément dans le domaine temporel. Pour l'étude des vibrations basses fréquences, des méthodes de réduction de modèles peuvent être mise en oeuvre pour réduire la partie linéaire du modèle. Posant  $U = \phi u$  dans lequel  $\phi$  est un vecteur de changement de base et  $u$  est une coordonnée généralisée, on détermine :

$$m\ddot{u} + ku + \phi^T F_{NL}(\phi u, \phi \dot{u}) = \phi^T F(t) \quad (1.40)$$

avec  $m = \phi^T M \phi$  et  $k = \phi^T K \phi$ .

Pour réduire la complexité de la partie non-linéaire, notamment si elle est localisée, il est possible de se servir des modes comme d'un "cas de charge" de la partie non-linéaire pour produire une simulation quasi-statique qui permet de déterminer l'énergie dissipée "modale" dont dérive la force de dissipation "modale".

Cette démarche est détaillée dans le chapitre 5. Cette force peut alors être identifiée à un modèle de rhéologie non-linéaire, voir section précédente. Le problème modal obtenu revêt alors la forme suivante.

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + ku + f_{nl}(u, \dot{u}, v) &= f(t) \\ \dot{v} &= g(u, \dot{u}, v) \end{aligned} \tag{1.41}$$

La généralisation de cette approche à un problème contenant plusieurs modes avec des forces de dissipation qui couplent les modes reste un sujet relativement ouvert abordé dans le projet MAIAS financé par le 9<sup>e</sup> FUI dans lequel intervient Supméca.

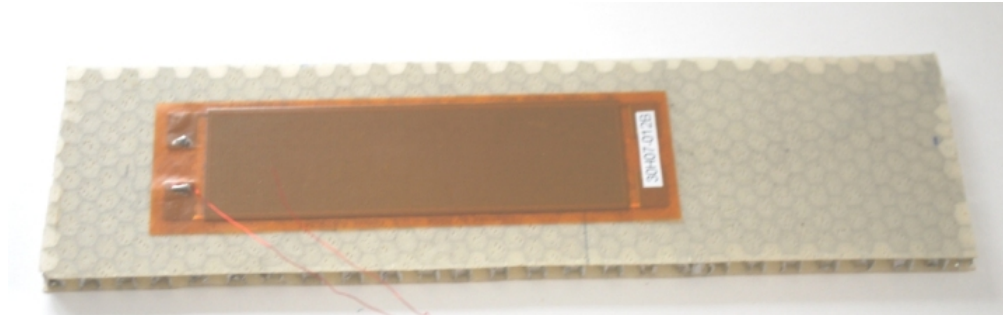


## Chapitre 2

# Couplages Electromécaniques

*On peut se demander si l'humanité a avantage à connaître les secrets de la nature, si elle est mûre pour en profiter ou si cette connaissance ne sera pas nuisible.*

Pierre CURIE, Physicien français (1859-1906)



### Résumé du Chapitre

Cette partie présente les travaux effectués sur le couplage électromécanique induit par l'effet piézoélectrique. Une large part de ces travaux porte sur l'évaluation expérimentale et numérique du couplage électromécanique des structures sur leurs modes de vibrations. L'objectif principal de ces travaux est de donner un critère simple et significatif aux concepteurs de structures instrumentées ou actionnées par des éléments piézoélectriques.

## Contexte de ces travaux

J'ai commencé à travailler sur ce sujet avec Ayech BENJEDDOU, professeur à Supméca. Le LISMMA était alors l'un des laboratoires acteur du Projet Européen CASSEM. L'acronyme CASSEM signifie : Composite and Adaptive Structures : Simulation, Experimentation and Modelling. L'objectif principal de ce projet était de développer des technologies pour le contrôle des vibrations en utilisant des moyens actifs et passifs. L'ambition du projet était de définir les meilleures techniques possibles pour modéliser, simuler et valider la présence de traitements anti-vibratoires.

Plusieurs doctorants ont participé à ces travaux et sont co-auteurs de différentes publications et communications autour de ces travaux : Julie-Anne Ranger, Salma Ghorbel, Pelin Berik. La suite de ce chapitre propose une synthèse des travaux que j'ai menés ou encadrés ces dernières années.

## 2.1 Introduction

Cette partie des travaux porte sur les couplages électromécaniques induits par effet piézoélectrique. Certains matériaux ont la propriété de transformer une contrainte mécanique en charge électrique, c'est l'effet direct très utilisé dans les capteurs. Cette propriété est démontrée par Pierre et Jacques Curie en 1880. L'effet inverse, utilisé dans les actionneurs, qui crée d'une contrainte mécanique à partir d'un champ électrique, fut prédit l'année suivante par Gabriel Lippman et vérifié par les Curie. Cette propriété fait d'abord l'objet d'applications purement académiques, puis de nombreux matériaux sont développés, parmi lesquels des céramiques, quartz, polymères, composites. Les développements technologiques ont conduit à la mise au point de systèmes industrialisés aujourd'hui. Dans le domaine de la métrologie, les transducteurs, les accéléromètres intègrent, pour une grande partie d'entre eux, des éléments piézoélectriques. Dans le domaine du positionnement, pour l'astronomie, pour la fabrication de micro ou nano-composants, dans les injecteurs de carburants dans l'automobile, l'empilement de couches piézoélectriques permet de fabriquer des actionneurs de grande précision. Ceux-ci exploitent l'effet inverse et sont donc pilotés par un signal électrique afin de générer un mouvement ou une force<sup>1</sup>. Plus récemment encore, les propriétés des matériaux piézoélectriques ont été utilisées pour effectuer du contrôle de vibrations. Le principe est de transformer une énergie vibratoire mécanique en énergie électrique que l'on peut dissiper ou absorber grâce à un circuit électrique adapté ou re-transformer en énergie mécanique pour contrôler les vibrations<sup>2</sup>. Outre les différents choix de matériaux piézoélectriques et différentes architectures de composants, il existe différents "modes d'action" : extension  $d_{33}$ , extension  $d_{31}$ , cisaillement  $d_{15}$ , voir tableau 2.1. Ces différents effets permettent des mesures ou des actionnements de natures différentes : extension ou cisaillement.

Selon le mode d'action, l'intégration du composant piézoélectrique est différente. Un exemple bien connu est la poutre "encastrée-libre" en flexion : il est possible d'engendrer la flexion en utilisant le couplage  $d_{31}$  par des pastilles collées en peau ou le couplage  $d_{15}$  par des pastilles collées au coeur de la structure, voir figure 2.1.

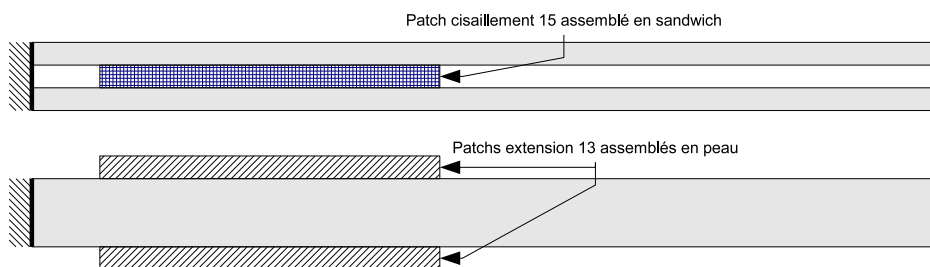


FIGURE 2.1 – Deux montages permettant de générer de la flexion avec patch à effet 15 à coeur et patches à effet 31 en peau.

1. Voir par exemple : Piezoelectric Actuators, <http://www.piezo.ws/pdf/Piezo.pdf>

2. Voir par exemple : Hagood & al. Modelling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control, JIMSS 1990

Mode d'action	Schéma	Equations Constitutives Réduites
33		$S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3$ $D_3 = d_{33} T_3 + \epsilon_{33}^T E_3$
31		$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3$ $D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3$
15		$S_5 = s_{55}^E T_5 + d_{15} E_1$ $D_1 = d_{15} T_5 + \epsilon_{11}^T E_1$

TABLE 2.1 – Synthèse des différents effets piézoélectriques couramment utilisés en actionnement et en capteur. La céramique est toujours identique géométriquement et par convention la polarisation  $P$  est toujours alignée avec l'axe 3. Les électrodes étant toujours placées de la même façon, le champ électrique  $E$  est dirigé suivant 3 pour les effets 33 et 31 et suivant 1 pour l'effet 15.

Au LISMMA, Ayeche Benjeddou a contribué à l'étude des possibilités offertes par le cisaillement, effet  $d_{15}$ , pour le contrôle des vibrations et plus récemment dans des applications statiques. Ma contribution a porté sur la mise en oeuvre expérimentale et numérique de plusieurs exemples de structures utilisant différents modes d'action dont certaines ont dépassé le cadre de cette activité pour être utilisées dans le développement d'un viscoanalyseur, voir Chapitre 3, ou d'un banc d'essai de mesure de l'amortissement induit par frottement, voir Chapitre 5. Pour le mécanicien, la conception de ce type de structure consiste à choisir :

- le matériau constitutif de la partie piézoélectrique
- les dimensions des éléments piézoélectriques
- le placement des éléments piézoélectriques

## 2.2 Modélisation

Une structure instrumentée par des éléments piézoélectriques est en général constituée d'une partie passive dont le comportement est purement mécanique ( $\Omega_m$ ) et d'une partie électromécanique ( $\Omega_p$ ) dont le comportement est gouverné par les équations constitutives de la piézoélectricité. Pour ce type de problème, et en faisant l'hypothèse que les comportements sont linéaires, le document de l'IEEE/ANSI<sup>3</sup> a proposé les équations suivantes.

3. IEEE Standard on piezoelectricity, 1987



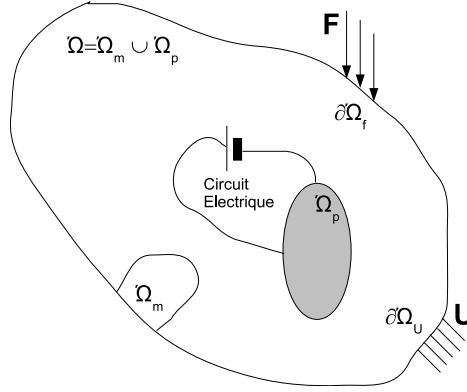


FIGURE 2.2 – Vision générale d'une structure mécanique instrumentée d'un élément piézoélectrique.

Equations de la mécanique valables sur $\Omega$	Equations Électromécaniques valables sur $\Omega_p$
Equation d'équilibre $T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$	Equation de l'électrostatique $D_{i,i} = 0$
Equation de compatibilité $S_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$	Relation de comportement $S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k$
Relation de Comportement $S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl}$	$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \epsilon_{ik}^T E_k$
ou	ou
$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}$	$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k$
Conditions aux limites $T_j = n_i T_{ij} = F$ sur $\partial\Omega_f$	$D_i = e_{ikl} S_{kl} - \epsilon_{ik}^S E_k$
$U_i = U$ sur $\partial\Omega_U$	Conditions aux limites $n_i D_i = 0$ si la face est libre $\varphi = \varphi_I$ si le potentiel est imposé

Dans la littérature, les relations de comportement sont souvent exprimées plus simplement en condensant les indices :  $i$  et  $k = 1...3$ ,  $p$  et  $q = 1...6$ , ce qui conduit aux notations "ingénieurs" et rend les écritures plus simples dans l'espace à deux dimensions d'une feuille !

$$\begin{aligned} S_p &= s_{pq}^E T_q + d_{kp} E_k \\ D_i &= d_{iq} T_q + \epsilon_{ik}^T E_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

Afin de déterminer le comportement de structures de géométrie complexe, des travaux précédents ont proposé des formulations propices au développement de méthodes numériques pour le calcul approché du comportement de ce type de structures. Il est impossible d'en faire un état de l'art complet dans ce mémoire tant la littérature est abondante. Dans les codes de calculs standards, c'est souvent la formulation en déplacement mécanique et potentiel électrique qui est utilisée, soit pour un milieu piézoélectrique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} c_{ijkl} \delta u_{i,j} u_{k,l} dV + \int_{\Omega_p} e_{kij} \delta u_{i,j} \varphi_{,k} dV + \int_{\Omega_p} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV &= \int_{\partial\Omega_p} T_i \delta u_i dS \\ - \int_{\Omega_p} e_{ikl} u_{k,l} \delta \varphi_{,i} dV + \int_{\Omega_p} \epsilon_{ik} \varphi_{,k} \delta \varphi_{,i} dV &= \int_{\partial\Omega_p} q_i \delta \varphi dS \end{aligned} \quad (2.2)$$

dans cette dernière :  $u$  et  $\delta u$  sont respectivement le champ de déplacement mécanique solution de l'équation et la fonction test homogène aux déplacements.  $\varphi$  et  $\delta \varphi$  sont respectivement le champ de potentiel électrique solution de l'équation et la fonction test homogène aux potentiels électriques. Ces derniers satisfont aux conditions fonctionnelles habituelles de régularité et de respect des conditions aux limites essentielles. La méthode des éléments finis est souvent utilisée pour approximer le champ de déplacement et le potentiel

électrique sur les noeuds d'un maillage. Les opérateurs de rigidité  $K_m$ , masse  $M$ , couplage électromécanique  $K_c$ , comportement diélectrique  $K_e$ , chargement mécanique  $F$  et électrique  $Q$  sont alors définis par les relations ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_p} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV &\Rightarrow \delta U^T M \ddot{U} \\
 \int_{\Omega_p} c_{ijkl} \delta u_{i,j} u_{k,l} dV &\Rightarrow \delta U^T K_m U \\
 \int_{\Omega_p} e_{kij} \delta u_{i,j} \varphi_{,k} dV &\Rightarrow \delta U^T K_c \Phi \text{ et } \int_{\Omega_p} e_{ikl} u_{k,l} \delta \varphi_{,i} dV \Rightarrow \delta \Phi^T K_c^T U \\
 \int_{\partial\Omega_p} T_i \delta u_i dS &\Rightarrow \delta U^T F \\
 \int_{\Omega_p} \epsilon_{ik} \varphi_{,k} \delta \varphi_{,i} dV &\Rightarrow \delta \Phi^T K_e^T \Phi \\
 \int_{\partial\Omega_p} q_i \delta \varphi dS &\Rightarrow \delta \Phi^T Q
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dans ces relations  $U$  et  $\Phi$  sont les vecteurs des déplacements et potentiels électriques calculés aux noeuds du maillage. La formulation précédente devient donc :

$$\begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \Phi \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_m & K_c \\ -K_c^T & K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ Q \end{bmatrix} \right) = 0 \tag{2.4}$$

C'est cette relation qui est utilisée en élastodynamique pour évaluer le comportement dynamique des structures instrumentées. Notons que dans cette équation, aucun terme d'amortissement mécanique n'a été pris en compte pour ne pas alourdir les notations. Il est évident que de tels comportements peuvent être ajoutés en prenant soin d'adapter les formulations à l'écriture utilisée, voir Chapitre 1.

## 2.3 Couplage électromécanique matériel

A l'échelle du matériau, la norme créée par IEEE/ANSI a imposé les coefficients de couplage matériau ( $k_{31}$ ,  $k_{33}$ ,  $k_{15}$ ) comme les indicateurs de la capacité de conversion électromécanique. Ces indicateurs peuvent être vus comme les indicateurs du "rendement" de l'élément piézoélectrique lorsqu'il est soumis à une sollicitation simple. A l'échelle de la structure, les modes de sollicitation des éléments piézoélectriques sont plus complexes, le transfert de l'énergie mécanique de déformation de la structure vers l'élément actif n'est souvent que très partiel, il est donc nécessaire de déterminer un terme de couplage électromécanique global. Ce dernier n'est pas toujours facile à déterminer directement. Les travaux menés sur cette thématique au LISMMA ont pour but de développer les méthodes expérimentales et de simulation numériques permettant de déterminer le Coefficient de Couplage Électromécanique global d'une structure ou d'un système mécanique.

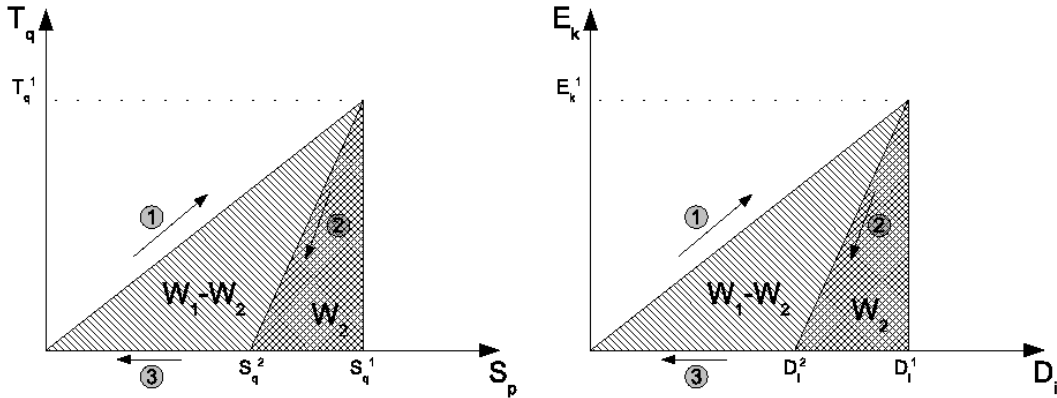


FIGURE 2.3 – Trajets de chargement mécanique (gauche) et électrique (droite) pour la détermination statique du coefficient de couplage électromécanique. Mise en évidence des phases d'essai 1, 2 et 3, voir table 2.3

La figure 2.3 reprend de manière schématique un essai quasi-statique de chargement permettant de mettre en évidence la conversion mécanique-électrique ou capteur à gauche et la conversion électrique-mécanique ou actionneur à droite. Ce type de trajet de chargement est très analogue à ce que l'on peut reproduire avec un essai de rhéologie. Toutefois il est assez difficile à réaliser pratiquement parce qu'il est compliqué de maintenir une charge électrique aux bornes de l'actionneur, celle-ci ayant tendance à se décharger à travers la résistance de l'appareil de mesure.

Phase	Capteur	Actionneur
1	Chargement mécanique avec $E_k=0$ $T_q^1$ $W_1 = \int_0^{T_q^1} T_q dS_p$ (2.1) donne $dS_p = s_{pq}^E dT_q$ ce qui donne $2W_1 = s_{pq}^E (T_q^1)^2$	Chargement électrique avec $T_q=0$ $E_k^1$ $W_1 = \int_0^{E_k^1} E_k dD_i$ (2.1) donne $dD_i = \epsilon_{ik}^T dE_k$ ce qui donne $2W_1 = \epsilon_{ik}^T (E_k^1)^2$
2	Déchargement mécanique avec $D_i=0$ $-W_2 = \int_{T_q^1}^0 T_q dS_p$ (2.1) donne $dS_p = (s_{pq}^E - \frac{d_{kp}d_{iq}}{\epsilon_{ik}^T})dT_q$ ce qui donne $2W_2 = (s_{pq}^E - \frac{d_{kp}d_{iq}}{\epsilon_{ik}^T})(T_q^1)^2$	Déchargement électrique avec $S_p=0$ $-W_2 = \int_{E_k^1}^0 E_k dD_i$ (2.1) donne $dD_i = (\epsilon_{ik}^T - \frac{d_{kp}d_{iq}}{s_{pq}^E})dE_k$ ce qui donne $2W_2 = (\epsilon_{ik}^T - \frac{d_{kp}d_{iq}}{s_{pq}^E})(E_k^1)^2$
3	Décharge électrique $W_3 = 0$	Décharge mécanique $W_3 = 0$

Dans toutes les configurations courantes 31, 33, 15, il suffit alors de déterminer le coefficient de couplage comme étant le rapport :

$$k_{ip}^2 = \frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{d_{iq}d_{kp}}{\epsilon_{ik}^T s_{pq}^E} \quad (2.5)$$

Ce qui permet d'obtenir les relations usuelles fournies par la norme IEEE :

Effet	Coefficient de Couplage
33	$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^T s_{33}^E}$
31	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}$
15	$k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^T c_{55}^D}$

Ces données sont en général fournies par les fabricants d'éléments piézoélectriques. Quelques exemples sont donnés ci-dessous. Il faut retenir que les céramiques sont les matériaux possédant le plus fort couplage, toutefois elles sont très rigides (proche de la rigidité d'un alliage d'aluminium) et relativement lourdes (masse volumique proche de celle d'un acier). Ces propriétés rendent leur usage compliqué sur les structures souples et légères comme la peau des NIDA, voir par exemple<sup>4</sup>. Dans ces applications, l'utilisation de matériaux composites à fibres piézoélectriques est plus indiquée même si le coefficient de couplage de l'élément actif est moins élevé.

Fabricant	Référence	Type	$k_{33}$	$k_{31}$	$k_{15}$
PI	PIC 255	Céramique	0.69	0.35	0.66
Smart Materials	/	Macro Fiber Composite	0.16	/	/
Cedrat Technologies	DPA	Céramique Multicouche	>0.5	/	/

4. Performance of piezoelectric patch actuators for vibration control of honeycomb panels. C. Florens, E. Balmes. 16 Symposium Vibrations Chocs et Bruits, 2008

## 2.4 Amortissement des vibrations

Qu'il s'agisse d'absorption ou réellement d'amortissement ou encore de contrôle actif, l'idée de départ est d'utiliser un élément piézoélectrique pour convertir l'énergie vibratoire de la structure mécanique en énergie électrique. Ensuite, les différentes approches portent sur la manière de dissiper, absorber ou encore contrôler les vibrations. Lorsque l'objectif est de produire de l'amortissement, l'atténuation des vibrations est obtenue par dissipation thermique de l'énergie dans un circuit de shunt résistif.

Pour illustrer le propos, considérons un mode de vibration d'une structure. Il est possible de passer de la formulation en élastodynamique d'une structure instrumentée à l'équation simple gouvernant le comportement d'un mode en considérant que les déplacements  $U$  peuvent s'exprimer comme le produit d'une amplitude vibratoire et de la forme propre du premier mode :

$$U = \Psi_m u_m(t) \quad \text{avec} \quad \Psi_m^T M \Psi_m = \mathbf{I} \quad (2.6)$$

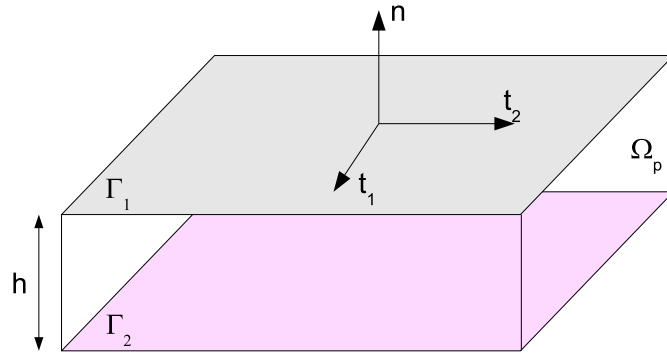


FIGURE 2.4 – Définition des zones d'électrodes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sur les peaux d'un domaine piézoélectrique  $\Omega_P$ .

Considérant le fait qu'un revêtement conducteur est déposé sur les faces des éléments piézoélectriques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , voir figure 2.4,  $\varphi = \varphi_{\Gamma_1}$  sur toute la surface  $\Gamma_1$  et  $\varphi = \varphi_{\Gamma_2}$  sur toute la surface  $\Gamma_2$ . Cette condition est appelée condition d'équi-potiel dans la suite de ce document. Les potentiels électriques internes au domaine  $\Omega_P$  ne sont pas contraints, néanmoins il est possible de postuler que, sur un mode, le vecteur des potentiels calculés aux noeuds peut se décomposer sur :

$$\Psi_e = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma_1} & \psi_e & \varphi_{\Gamma_2} \end{bmatrix}^T \quad (2.7)$$

En effectuant un changement d'origine, on peut écrire la décomposition sur :

$$\Psi_e = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma_1} - \varphi_{\Gamma_2} & \psi_e - \varphi_{\Gamma_2} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.8)$$

Enfin une normalisation de la base par rapport à  $V = \varphi_{\Gamma_1} - \varphi_{\Gamma_2}$  donne la décomposition suivante :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\psi_e - \varphi_{\Gamma_2}}{V} & 0 \end{bmatrix}^T V(t) \quad (2.9)$$

En utilisant l'équation de l'élastodynamique 2.4 et les bases de projections  $\Psi_m$  et  $\Psi_e$  définies ci-dessus, on obtient une équation simple de la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m + \omega_0^2 u_m - \omega_0 K \sqrt{C} V &= f \\ C V - q + \omega_0 K \sqrt{C} u_m &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dans laquelle :

- par hypothèse, la masse est unitaire,

- $C$  designe la capacité de l'élément piézoélectrique,
- $V$  est la différence de potentiel entre les électrodes de l'élément piézoélectrique,
- $\omega_0 = \omega_0^{SC}$  est la pulsation propre mesurée en court circuit, c'est à dire lorsque  $V = 0$ ,
- $f$  est la projection de la force exercée sur la structure,
- $q$  est la charge effective générée par le patch telle que l'intensité du courant circulant dans le circuit de shunt soit égale à  $i = dq/dt$ ,
- $K$  est le coefficient de couplage effectif de la structure.

Chacun de ces termes provient de la projection des opérateurs de l'équation 2.4, et sont donc dépendants du mode de projection et bien sûr des différents paramètres géométriques et matériaux. Une généralisation de cette expression applicable pour une application "multi-modes" existe, voir par exemple le mémoire de thèse de Julien Ducarne<sup>5</sup> ; elle n'est pas utilisée dans les travaux présentés dans ce mémoire puisque les applications portent sur des modes découplés étudiables séparément.

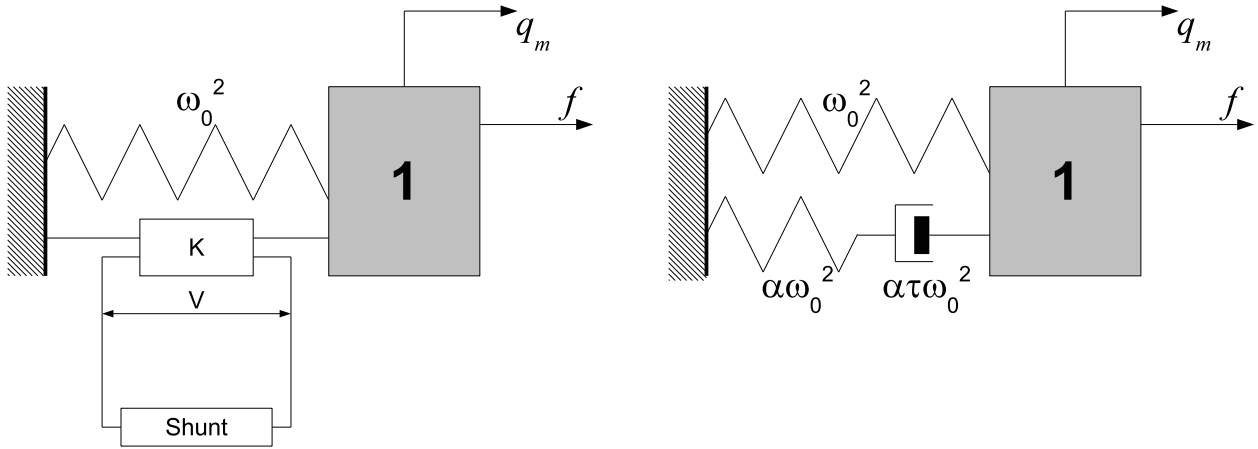


FIGURE 2.5 – Gauche : Schéma du système instrumenté d'un patch piézoélectrique, à 1 degré de liberté, équivalent à un mode de vibration, muni d'un circuit de shunt. Droite : Modèle de vibration de Zener équivalent à la structure instrumentée munie d'un shunt résistif.

De nombreux dispositifs de shunt du circuit électrique ont été testés, puis présentés dans la littérature. Parmi eux, les résistances  $R$ , les inductances  $L$ , les circuits  $RL$ ,  $R$ +Capacité négative ; seul le shunt résistif et le shunt  $RC$  sont des dispositifs amortissants. Les shunts  $L$  et  $RL$  sont des dispositifs d'absorptions. Un shunt résistif donne au système à un degré de liberté de la figure 2.5 la fonction de transfert suivante, exprimée dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{\hat{f}}{\hat{u}_m} = -\omega^2 + \frac{RCj\omega}{1 + RCj\omega} \omega_0^2 K^2 + \omega_0^2 \quad (2.11)$$

Dans cette fonction de transfert, le terme d'amortissement est analogue à celui que génèrerait un élément rhéologique de Zener, voir figure 2.5. On note  $\tau$  la constante de temps

$$\frac{\hat{f}}{\hat{u}_m} = -\omega^2 + \left( \frac{\alpha\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} + 1 \right) \omega_0^2 \quad (2.12)$$

Ce type de rhéologie ne génère de l'amortissement que dans une bande restreinte de fréquence. Dès lors, il est nécessaire d'"accorder" l'amortisseur à la fréquence à amortir. Il faut, en l'occurrence imposer  $\tau$  tel que :

$$\tau = \frac{1}{\omega\sqrt{1 + \alpha}} \quad (2.13)$$

5. Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés, CNAM 2010

Pour le shunt résistif, la constante de temps  $\tau = RC$  et la rigidification  $\alpha = K^2$ . La résistance optimale est donc donnée par la relation suivante, voir par exemple le mémoire de thèse de Julie-Anne Ranger,<sup>6</sup> ou O. Thomas et al.<sup>7</sup>

$$R_{opt} = \frac{1/C}{\omega_0 \sqrt{1 + K^2}} \quad (2.14)$$

Cet effet est bien illustré par le résultat expérimental obtenu sur une poutre instrumentée de deux patchs publié dans [?], voir figure 2.6. Dans ces travaux, la résistance de shunt avait été modifiée depuis une valeur très faible, proche du court circuit, jusqu'à une valeur très importante, proche du circuit ouvert, en passant par la valeur optimale. Pour cette dernière, la Fonction de Réponse en Fréquence est la plus basse en terme d'amplitude et l'amortissement est maximum. Le facteur de perte obtenu à la résonance pour un choix de

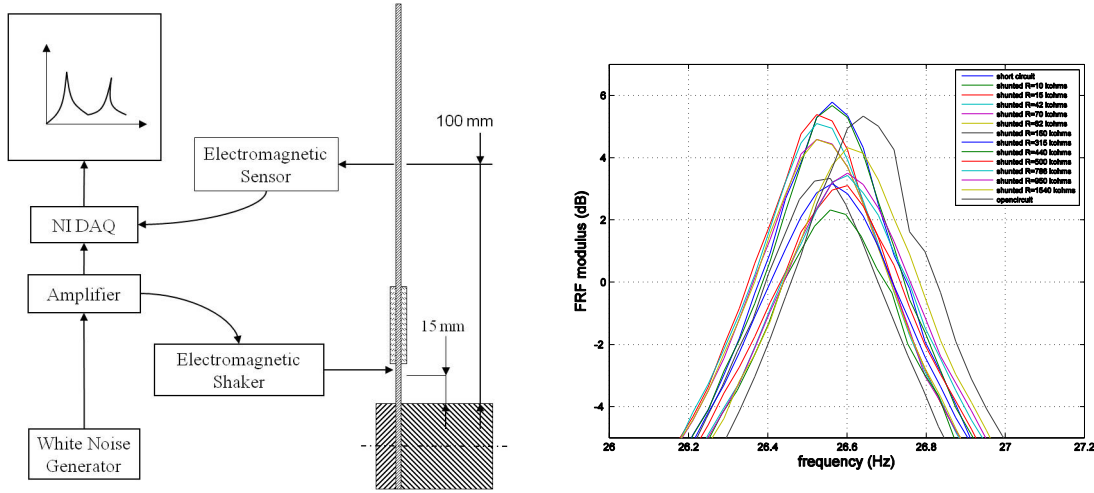


FIGURE 2.6 – Gauche : Dessin de définition du moyen d'essai publié dans [?]. Droite : Fonction de Réponse en Fréquence de la structure de test. Etude de l'atténuation de l'amplitude vibratoire d'un mode obtenue par shunt résistif. Recherche empirique de la résistance optimale.

résistance optimal est égal à :

$$\eta = \frac{K^2}{2\sqrt{1 + K^2}} \quad (2.15)$$

Les performances d'un simple shunt résistif ne sont pas excellentes. Il est possible de les amplifier en ajoutant un condensateur de capacité  $C_n$  négative en parallèle du patch. Dans ce cas, l'impédance devient :

$$\frac{\hat{f}}{\hat{u}_m} = -\omega^2 + \frac{RCj\omega}{1 + R(C + C_n)j\omega} \omega_0^2 K^2 + \omega_0^2 \quad (2.16)$$

Cet ajout conduit à écarter les pôles et zéros de la fonction, ce qui se traduit par une augmentation du facteur de perte, voir figure 2.7. Le couplage est toujours l'indicateur de la bonne conception mécanique dans un cas comme dans l'autre.

## 2.5 Détermination du coefficient de Couplage

La partie précédente a exposé les principes généraux pour l'obtention d'un amortissement vibratoire à partir d'un élément piézoélectrique et un circuit de shunt. Nous avons montré que quel que soit le circuit, l'indicateur mécanique de conception est le coefficient de couplage effectif  $K$ . Cette partie expose les différentes méthodes développées pour déterminer le coefficient de couplage.

6. Amortissement passif des vibrations par patchs piézo-céramiques shuntés, ECP, 2007

7. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. Smart Materials and Structures, 2012

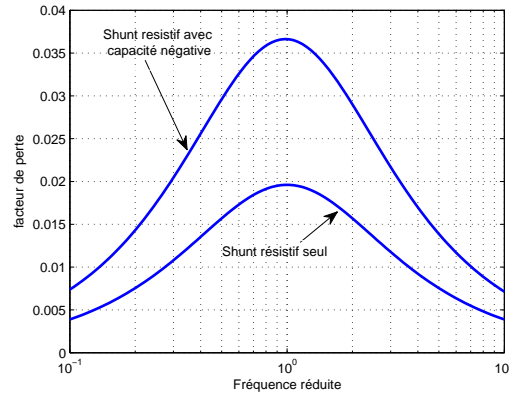


FIGURE 2.7 – Comparaison entre les facteurs de pertes obtenus avec un shunt restrictif doté ou non d'une capacité négative.

### 2.5.1 Définitions

Si on reprend l'équation 2.5 qui définit le couplage à l'échelle du matériau obtenu analytiquement en considérant les champs mécaniques et électriques uniformes et unidirectionnels sur l'élément piézoélectrique, on peut définir par analogie une relation sur l'ensemble de la structure :

$$K_m^2 = \frac{W_{OC} - W_{SC}}{W_{OC}} \quad (2.17)$$

Dans cette équation,  $W_{OC}^2$  désigne l'énergie de déformation en circuit ouvert et  $W_{SC}^2$  désigne l'énergie de déformation en circuit fermé. Une autre façon de voir les choses, qui justifie également les notations précédentes est de ne considérer qu'un seul mode : le comportement de la structure est régit par la relation 2.5.3. Intéressons nous à la partie "rhéologique" de cette équation, c'est à dire dépourvue des termes d'inertie ; lorsque le circuit est ouvert, la résistance du circuit tend vers l'infini ; l'énergie de déformation pour une cinématique unitaire est alors égale à la limite du terme rhéologique quand  $R$  tend vers  $\infty$  :

$$W_{OC} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{RCj\omega}{1 + RCj\omega} \omega_0^2 K^2 + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 K^2 + \omega_0^2 \quad (2.18)$$

Même raisonnement, pour l'énergie de déformation lorsque le circuit est fermé avec une résistance qui tend vers 0 :

$$W_{SC} = \lim_{R \rightarrow 0} \left( \frac{RCj\omega}{1 + RCj\omega} \omega_0^2 K^2 + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 \quad (2.19)$$

En utilisant les trois relations précédentes, nous trouvons une expression différente du coefficient de couplage  $K_m$ , soit :

$$K_v^2 = \frac{W_{OC} - W_{SC}}{W_{SC}} \quad (2.20)$$

La relation entre ces deux coefficients de couplage  $K_v^2$ , venant de la définition vibratoire, et  $K_m^2$ , venant de la définition matérielle, s'établit facilement :

$$K_v^2 = \frac{K_m^2}{1 - K_m^2} \quad (2.21)$$

L'objet n'est pas de discuter l'intérêt de l'une ou l'autre des deux définitions qui sont liées à des conventions de notation. Il n'en demeure pas moins que chacune d'elle doit être utilisée en ayant conscience de sa signification pour ne pas introduire de biais dans le calcul des valeurs des composants dans un circuit de shunt. Du point de vue mécanique, les deux définitions produisent un indicateur fiable pour concevoir la structure.

## 2.5.2 Méthodes numériques

Pour mettre au point un montage instrumenté par la simulation numérique, nous avons montré que le coefficient de couplage était un bon indicateur. Pratiquement, la structure d'accueil est généralement définie et les questions que se pose le concepteur sont : Quel matériau ? Quelles dimensions pour le patch ? Quelle position sur la structure ? Il s'agit donc de pouvoir simuler différentes configurations géométriques pour évaluer laquelle produit le meilleur couplage électromécanique. La première façon de faire consiste à calculer les opérateurs de rigidité, couplage, inertie et diélectrique par la méthode des éléments finis, voir équations 2.3. La réduction cinématique de modèle proposée dans la section précédente, voir 2.9 permet alors d'obtenir un modèle simple 2.5.3. Toutefois l'obtention de ce modèle est relativement "intrusive" dans le code de calcul puisqu'il faut extraire les opérateurs et faire quelques opérations pour construire la base de projection. Afin de proposer des solutions facilement utilisables dans un contexte d'ingénierie, nous proposons ici des méthodes basées sur la détermination directe du coefficient de couplage  $K_v^2$ . La première idée est d'exploiter la définition 2.20. En effet les énergies de déformation modales en Court-Circuit et Circuit-Ouvert ne sont rien d'autre que les carrés des pulsations propres calculées en circuit ouvert et en circuit fermé :

$$\begin{aligned} W_{OC} &= \psi_{OC}^T K_{OC} \psi_{OC} = \omega_{OC}^2 \\ W_{SC} &= \psi_{SC}^T K_{SC} \psi_{SC} = \omega_{SC}^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dans ces deux définitions, les vecteurs propres et valeurs propres sont obtenus par la résolution des problèmes aux valeurs propres ci-dessous :

$$\begin{aligned} (-M\omega_{OC}^2 - K_{OC}) \psi_{OC} &= 0 \\ (-M\omega_{SC}^2 - K_{SC}) \psi_{SC} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

dans lesquels les vecteurs propres sont tous les deux normalisés par rapport au même opérateur de masse qui n'est pas affecté par le changement de conditions aux limites électriques appliqué pour déterminer les deux configurations. Ainsi la configuration CC peut être déterminée en imposant un potentiel nul sur les électrodes tandis que la configuration OC peut être déterminée en imposant un potentiel nul sur une électrode et une condition d'équipotentiel sur l'autre électrode. Cette démarche n'est ni coûteuse en temps de calcul, ni très intrusive du point de vue numérique. Le temps de mise en donnée des conditions aux limites peut être réduit en instanciant les électrodes du point de vue géométrique pour que les modifications de géométrie ne nécessitent pas de tâche manuelle d'affectation des conditions aux limites. La création de telles conditions aux limites avec un noeud maître et des équations de liaison est détaillée dans [? ], partie 3.1.

$$K_v^2 = \frac{\omega_{OC}^2 - \omega_{SC}^2}{\omega_{SC}^2} \quad (2.24)$$

Notons toutefois que la méthode nécessite l'utilisation d'un code de calcul intégrant une formulation électromécanique. Pour palier à ce problème de disponibilité des codes de calcul multi-physiques dans les bureaux d'études, plusieurs approximations ont été développées. Une revue de ces méthodes a été publiée par A. Benjeddou<sup>8</sup>. Considérant la définition de  $K_v^2$ , voir 2.20, il est possible de décomposer les énergies localisées dans la structure  $W^S$  et dans les patches  $W^P$ , soit :

$$K_v^2 = \frac{W^S + W_{OC}^P - W^S - W_{SC}^P}{W^S + W_{SC}^P} = \frac{W_{OC}^P - W_{SC}^P}{W^S + W_{SC}^P} \quad (2.25)$$

En utilisant la définition du couplage matériel, voir 2.5,

$$W_{OC}^P - W_{SC}^P = k_{ij}^2 W_{OC}^P = \frac{k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2} W_{SC}^P \quad (2.26)$$

on obtient :

$$K_v^2 = \frac{k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2} \frac{W_{SC}^P}{W^S + W_{SC}^P} \quad (2.27)$$

8. Approximate evaluation of the modal effective electromechanical coupling coefficient, Proc. IUTAM, 2008



Intitulé	Mode	1	2	3	4
Valeur expérimentale	$K(\%)$	9.91	0	1.61	15.3
Valeur calculée	$K_v(\%)$	9.03	0	0	18.15
Valeur calculée	$K_{va}(\%)$	14.5	20.21	27.65	13.35

TABLE 2.2 – Résultats d’expérience et de simulation avec les deux formules publiées dans [? ].

Cette relation ne fonctionne pas tout le temps, il faut en particulier que **les patches soient sollicités quasi-uniformément dans une direction**, c’est à dire dans les conditions d’établissement d’un coefficient de couplage matériel  $k_{31}$ ,  $k_{15}$ , etc. Cette hypothèse n’est réalisée que lorsque le patch est petit devant la taille de la structure et les modes sont des modes d’ensemble. Si par ailleurs **les modes de la structure sans instrumentation sont proches de ceux de la structure instrumentée**, on peut définir :

$$K_{va}^2 = \frac{k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2} \frac{\omega_{SC}^2 - \omega_S^2}{\omega_{SC}^2} \quad (2.28)$$

Dans laquelle,  $\omega_S$  est la pulsation propre de la structure non-instrumentée. Dans ces conditions, et considérant l’équation 2.4, on peut montrer que si l’on considère le potentiel électrique nul en tout noeud du domaine lorsque les conditions aux limites de court circuit sont appliquées,  $\omega_{SC}$  peut être déterminé en résolvant un problème purement mécanique. Il est donc possible en utilisant la dernière relation de construire le coefficient de couplage à partir de deux problèmes purement mécaniques. La figure 2.8 expose le benchmark publié en 2008, [? ]. Dans cette étude, la structure est une poutre courte encastrée libre. Les résultats de l’étude sont résumés dans le tableau 2.2 issu de la publication [? ]. La dimension des patches rend les hypothèses précédentes inopérantes sur les modes deux et trois. Ceci est du au fait que ces modes sont des modes de flexion dans le plan et de torsion qui ne sollicitent pas les patches selon l’effet 31. Par ailleurs la condition d’équipotentiel n’étant pas prise en compte dans la formule approchée, les résultats sont encore plus entachés d’erreurs.

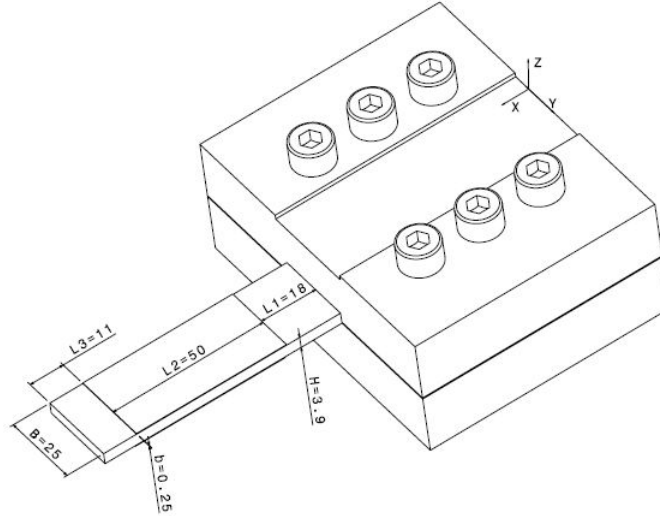


FIGURE 2.8 – Dessin de définition du Benchmark publié dans SMS 2008, [? ].

Dans une démarche encore plus simple, et par analogie avec ce qui se pratique pour les éléments viscoélastiques, il est parfois possible d’effectuer le placement des patches par une simple analyse de la densité d’énergie de déformation. C’est l’approche qui est retenue dans [? ] dans le cadre d’une étude sur le placement d’un

patch sur une plaque composite multicouche. Cette approche montre que si on place un patch dans une zone à forte densité d'énergie de déformation modale, le couplage de ce mode sera élevé, voir figure 11 et table 4 de la publication.

### 2.5.3 Méthodes expérimentales

Parmi les méthodes expérimentales, il existe deux grandes familles, la première consiste à utiliser l'impédance mécanique, la seconde à utiliser l'impédance électrique. Les méthodes utilisant l'impédance mécanique sont très proches de celles qui ont été définies dans la section précédente. Tout l'enjeu est de mesurer la différence de fréquences entre les configurations circuit-ouvert et court-circuit. Les écarts de fréquences étant très faibles entre la configuration circuit ouvert et la configuration court-circuit, il faut prendre un soin particulier dans la réalisation des expériences. Dans tous les travaux que nous avons publiés, un montage expérimental a été développé. La première a été la poutre longue présentée sur la figure 2.6 et dans [?] et [?]. La deuxième a été la poutre courte épaisse des travaux publiés dans [?] et présentée sur la figure 2.8. La troisième a été la plaque carbone multicouche publiée dans [?]. Il ressort de ces travaux plusieurs pointsF cruciaux pour la bonne détermination du couplage électromécanique à partir de la fonction de transfert mécanique, équation et de la relation 2.24 :

- La détermination des pulsations Circuit-Ouvert et Circuit-Fermé sont faites grâce à l'établissement de la fonction de transfert entre un déplacement mesuré  $\hat{u}$  et l'excitation appliquée  $\hat{f}$ , voir 2.9. L'excitation peut-être aléatoire, balayage en fréquence (donc sinusoïdale), ou un choc. L'excitation n'est pas vraiment un problème, si elle n'est pas trop intrusive, risque de couplage d'impédance avec un pot non asservi. Les régimes permanents permettent un moyennage qui améliore le rapport signal sur bruit. Toutefois une excitation au choc bien réalisée produit de très bons résultats.
- Les conditions expérimentales de la détermination de la pulsation en circuit ouvert et en circuit fermé doivent être strictement identiques du point de vue des conditions de liaison, même éprouvette, même liaison et si possible pas de démontage entre les deux tests. Cette condition rend la relation approchée 2.28 difficile à utiliser puisqu'il faut deux éprouvettes différentes, voir thèse de Salma Ghorbel.
- La résolution fréquentielle est **le secret de la réussite avec cette approche**. Comme il s'agit de mesurer un écart de fréquence, il faut, c'est une lapalissade, que cet écart soit mesurable. Il faut donc maximiser la résolution fréquentielle en effectuant des essais de longue durée, ce qui plaide pour les régimes permanents, ou lorsque les chocs mais sur des structures peu amorties. Notons que d'après les résultats publiés dans [?], l'erreur relative sur  $K^2$  est directement proportionnelle à la résolution fréquentielle, voir figure 2.9.
- La mesure de coefficient de couplage très faible est très difficile. Toujours d'après [?], l'erreur relative sur  $K^2$  est inversement proportionnelle à  $K^2$  lui même, figure 2.9. Ce problème est compensable, dans une certaine mesure, par la résolution fréquentielle. Pour les très faibles coefficients, la valeur mesurée doit cependant en toute honnêteté être affectée d'une erreur probable très importante.

Une alternative possible à l'utilisation de la fonction de transfert mécanique est l'utilisation d'une fonction de transfert électrique obtenue d'après les équations 2.10. On montre que le transfert peut s'écrire :

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{s} \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2(1 + K^2)} \quad (2.29)$$

$\omega_z^2 = \omega_0^2$  définit donc le zéro de la fonction de transfert électrique tandis que  $\omega_p^2 = \omega_0^2(1 + K^2)$  en définit le pôle. La mesure de ces deux valeurs grâce à un impédancemètre permet de déduire  $K^2$  tel que :

$$K_v^2 = \frac{\omega_p^2 - \omega_z^2}{\omega_z^2} \quad (2.30)$$

Cette technique a pu être testée dans les travaux publiés dans [?]. Elle présente l'immense avantage d'un montage expérimental réduit à sa plus simple expression, puisque c'est le patch qui fait office de capteur et d'actionneur. Toutefois l'appareil qui permet de produire le résultat est un impédancemètre qui n'est pas très répandu dans les laboratoires d'essais en mécanique. La résolution obtenue sur  $K$  n'est pas meilleure, puisque

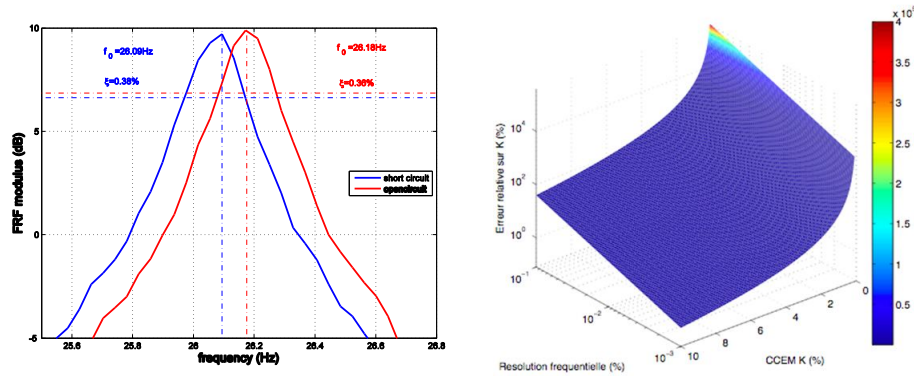


FIGURE 2.9 – Gauche : Fonction de transfert obtenue par excitation aléatoire publiée dans [? ]. L'écart de fréquence est proche du 0.1Hz pour un couplage d'environ 8%. Droite : Erreur relative sur  $K$  en fonction de la résolution fréquentielle et de  $K$  lui même.

l'erreur relative sur  $K$  possède la même forme que précédemment. Une piste intéressante cependant serait d'utiliser une capacité négative pour écarter les pôles et zéros électriques artificiellement et ainsi faciliter la mesure du couplage. Ceci n'a pas encore été testé.

## 2.6 Aspects méthodologiques

La mise en oeuvre expérimentale des patches piézoélectriques a constitué un apport important pour notre connaissance technologique. Le choix de la polarisation et le câblage électrique associé requièrent quelques précautions pour que le résultat expérimental soit en accord avec nos espérances ! De même, la mise en oeuvre dans un code calcul recèle quelques difficultés, liés au repère de travail et à la définition des matériaux ou encore à la mise en oeuvre de la condition d'équipotentialité. Dans les deux paragraphes qui suivent nous exposons quelques informations intéressantes relatives à la pratique expérimentale et numérique.

### 2.6.1 Corrélation entre la polarisation et le câblage électrique

Pour le novice, le lien entre la polarisation et le câblage électrique des patch n'est pas évident. Lorsque nous avons décidé de coller deux patches en vis à vis sur la poutre longue, voir figure 2.6, la question s'était posée de savoir comment les coller : en polarisation opposée ou identique. La réponse fut de réaliser les deux montages pour les comparer en termes de performances, voir 2.10. Tout d'abord, pour ce type de montage, le câblage électrique associé, montage des patches en série ou en parallèle, permet de créer un capteur de traction ou un capteur de flexion, voir [?] pour plus d'explications. Le même type d'effet peut être obtenu avec des jauges de déformation. La première conséquence du choix de polarisation et de montage électrique associé est donc le filtrage possible de certaines sollicitations ou de certains modes de vibrations. En l'occurrence, pour observer le couplage en flexion, il était nécessaire de câbler les patches en série s'ils étaient collés en polarisation opposée et vice versa. Par ailleurs, la capacité électrique du montage en série est 4 fois plus faible que celle d'un montage en parallèle. On pouvait espérer que l'amortissement produit par un shunt soit plus important puisque la capacité intervient directement dans le calcul de la résistance de shunt. Il s'agit malheureusement d'une fausse piste puisque l'amortissement produit ne dépend que du couplage qui n'évolue pas avec le choix du montage électrique.

### 2.6.2 Equipotentialité

Le sujet a été abordé en amont, les patches sont recouverts d'une électrode conductrice qui impose la mise en place d'une condition aux limites électriques sur la surface du patch. Lorsque la sollicitation du patch est

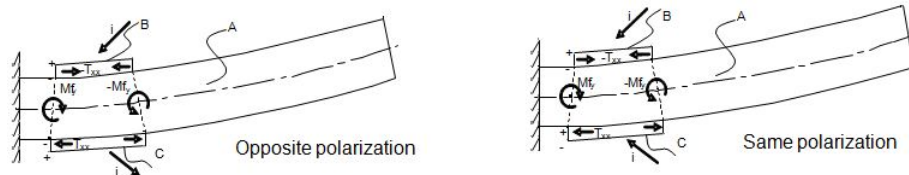


FIGURE 2.10 – Schéma de collage des patches en polarisation opposée et identique. Conséquence sur le signe du courant, publié dans [? ].

relativement uniforme parce que le mode de vibrations étudié est global et/ou que la taille du patch est petite, cette condition n'a que peu d'importance. Toutefois cette condition peut agir comme un **filtre géométrique** lorsque ces conditions ne sont pas réalisées. Ainsi les modes faisant apparaître une anti-symétrie dans la répartition des potentiels électriques sur les peaux des patches, ont un potentiel moyen nul sur la surface des patches lorsque la condition est appliquée. Il y a une conséquence immédiate sur la valeur du couplage qui s'annule dans ce cas extrême puisqu'en l'absence de potentiel électrique, l'énergie électrique produite est nulle, voir figure 2.11 et résultats détaillés dans [? ] et [? ].

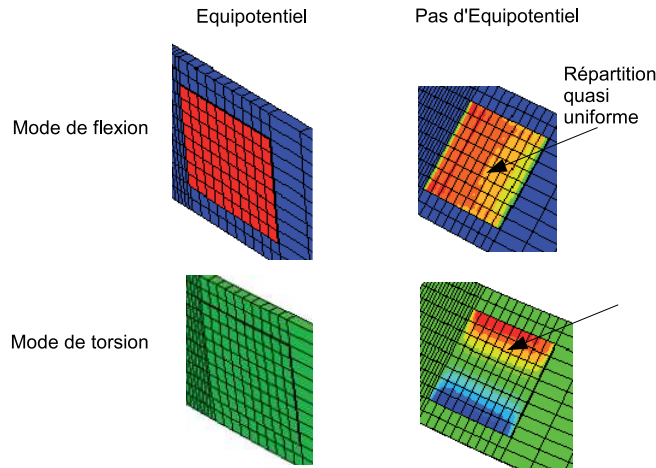


FIGURE 2.11 – Cartographie de potentiel électrique avec et sans condition d'équipotential pour un mode de flexion couplé électromécaniquement et un mode de torsion non couplé, plus de détails dans [? ] et [? ].

Outre les erreurs, en terme de modélisation, que génère la non-prise en compte de l'électrode, une réflexion est menée actuellement sur la forme que l'on peut donner à l'électrode pour maximiser le couplage énergétique. Dans le cas du mode de torsion découplé ci-dessus une découpe de l'électrode en deux parties suivant la longueur et un câblage en parallèle des deux sous-parties aurait permis d'obtenir un couplage non-nul.

## 2.7 Conclusions et perspectives

D'un point de vue personnel, l'apport de ces travaux a été une meilleure maîtrise scientifique et technologique de la physique associée à ces éléments. Dans le cadre de ce mémoire, les travaux exposés portent sur l'utilisation d'éléments piézoélectriques en dynamique des structures pour produire de l'amortissement. En marge de ces travaux, les collègues ont montré que le coefficient de couplage peut être utilisé comme indicateur d'endommagement pour des travaux sur la surveillance de la santé des structures. La maîtrise de cette technologie a également permis le développement de moyen d'essais dans lesquels ces éléments sont utilisés en actionneurs, voir Chapitre 3 et Chapitre 5. Les travaux actuels portent sur l'utilisation d'éléments

piézoélectriques comme capteurs statiques de pression de contact dans le cadre du projet MAIAS, et comme capteurs de couple de torsion en utilisant l'effet 15 dans le cadre de la thèse de Pelin Berik, voir figures ci-dessous. Enfin certains travaux publiés ne sont pas exposés ici dans un souci de concision, voir par exemple [?] et [?].

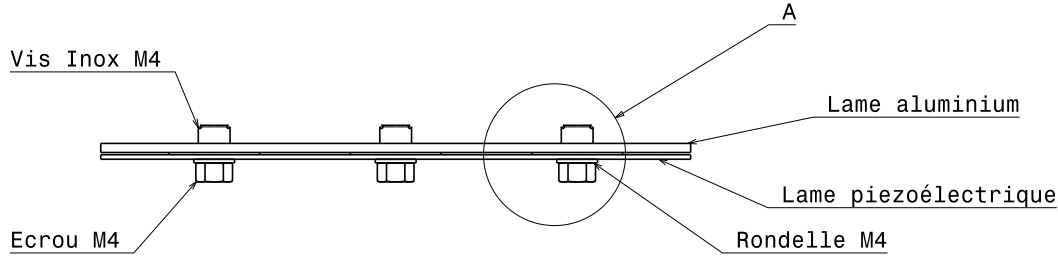


FIGURE 2.12 – Plan d'ensemble du montage vibratoire avec instrumentation statique pour déterminer le champ de pression de contact entre la lame en aluminium et la lame piézoélectrique.

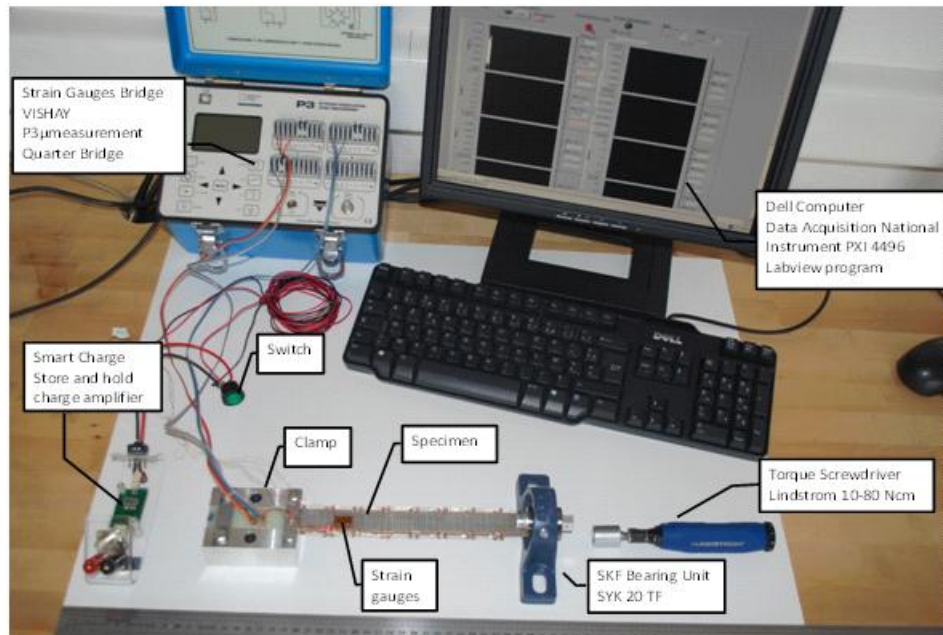


FIGURE 2.13 – Vue d'ensemble du montage de capteur de couple avec patches à effet 15.

## Références du Chapitre

- [1] G. Chevallier, J.-A. Ranger, A Benjeddou, and H. Sebbah. Passive vibration damping using resistively shunted piezoceramics : An experimental performance evaluation. Monastir, Tunisia, 2007. Congrès International en Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques.
- [2] G Chevallier, S Ghorbel, and A Benjeddou. A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures. *Smart Materials and Structures*, 17(6) :065007, December 2008.

- [3] S. Ghorbel, G. Chevallier, and A. Benjeddou. Détermination expérimentale et numérique du coefficient de couplage électromécanique généralisé de structures piézoélectriques. Lyon, France, 2008. Colloque Vibrations, Chocs et Bruits.
- [4] A. Benjeddou, S. Ghorbel, and G. Chevallier. On 2d plane strain/stress vibration analysis of piezoelectric structures. Hammamet, Tunisia, 2009. Congrès International en Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques.
- [5] A. Benjeddou, S. Ghorbel, and G. Chevallier. On approximate evaluations of the modal effective electromechanical coupling coefficient. Marrakech, Maroc, 2009. Congrès Marocain de Mécanique.
- [6] G. Chevallier and A. Benjeddou. Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques composites. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, 19(3) :339–364, 2009.
- [7] G. Chevallier and A. Benjeddou. Numerical and experimental evaluations of the modal effective electromechanical coupling coefficient. Vernon, France, 2009. Third International Symposium on Design Modelling and Experiments of Adaptive Structures and Smart Systems.
- [8] G. Chevallier, S. Ghorbel, and A. Benjeddou. Piezoceramic shunted damping concept : testing, modelling and correlation. *Mécanique & Industries*, 10(5) :397–411, November 2009.



## Chapitre 3

# Viscoélasticité : de la mesure à la simulation

*Étymologie du mot Caoutchouc :*  
*en quechua Cao signifie bois et tchu qui pleure.*  
Redécouvert par Charles Marie de La Condamine (1701-1774)



### Résumé du Chapitre

Trois aspects sont abordés dans ce chapitre. Tout d'abord, un nouveau viscoanalyseur dédié à la mesure à hautes fréquences des comportements viscoélastiques est présenté. Ensuite, de nouvelles hypothèses pour la simulation de structures intégrant des effets viscoélastiques sont formulées. Et enfin, nous présentons une nouvelle méthode pour l'identification de modèles paramétriques pour la simulation à partir de données d'essais.



### 3.1 Introduction et contexte de ces travaux

Les travaux sur la viscoélasticité sont très anciens au LISMMA. Les professeurs Vinh et Chevalier ont proposé des modèles et imaginé des moyens d'essais, il y a plusieurs dizaines d'années. Plus récemment, les travaux de thèse de Jean-Luc Dion ont contribué à unifier les discours sur les modèles à dérivées fractionnaires et sur les modèles à fractions rationnelles. Les travaux engagés avec BOSCH, dans le cadre de la thèse de Franck Renaud, sur l'influence des comportements viscoélastiques sur le crissement de frein ont nécessité de franchir plusieurs pas supplémentaires :

- Le crissement se produisant à des fréquences élevées ( $> 1000Hz$ ), il a fallu imaginer des moyens d'essais permettant la caractérisation des matériaux viscoélastiques à haute fréquence, voir [? ]. Ce sujet a été poursuivi dans le cadre du Projet MAIAS du pôle de compétitivité ATSECH pour différentes sollicitations et pour atteindre des fréquences de caractérisation encore plus élevées, [? ].
- Un des outils utilisés pour la simulation du crissement de frein est l'analyse de stabilité du glissement stationnaire par extractions des modes et valeurs propres complexes. Il fallait donc réaliser le portage des modèles rhéologiques permettant de prendre en compte la dépendance du comportement viscoélastique dans ce type de simulations, voir [? ].
- Pour lier les essais de caractérisation aux simulations, de nouvelles méthodes permettant d'identifier les comportements viscoélastiques des différents matériaux constitutifs d'une structure ont été développées, voir [? ], [? ] et [? ].

Les trois aspects : caractérisation, identification et simulation sont fortement liés dans ces travaux. En effet les contraintes de simulations : fréquences élevées, différents paramètres de fonctions de relaxation et faibles amplitudes de sollicitations, ont conditionné les méthodes d'identification et les moyens de mesure.

### 3.2 Viscoanalyse

L'introduction de ce mémoire a exposé quelles sont les différentes techniques de caractérisation disponibles sur le marché. Compte tenu de ce qui a été dit dans cette partie, nous voulions un moyen d'essai capable :

- de produire des courbes maîtresses sans exploiter l'équivalence temps-fréquence car nous n'étions pas sûr *a priori* que tous les matériaux qui nous intéressent respectent ce principe,
- de produire ces courbes dans la bande [500-5000]Hz en disposant d'un nombre de points significatifs par octave.

Les moyens indirects ont été rapidement écartés parce qu'ils nécessitent des adaptations pour pouvoir produire suffisamment de points par octave : modification de conditions aux limites ou changement de géométrie. Par ailleurs, il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance de la géométrie de l'échantillon pour pouvoir inverser le problème et identifier le facteur de pertes du matériau testé. Or les tôles multicouches que nous avons testées sont constituées de plusieurs couches métalliques sur et entre lesquelles ont été déposées des couches amortissantes. Enfin, la pré-charge et l'effet Payne, c'est à dire les comportements en grandes déformations, sont difficilement caractérisables avec ce type de moyens d'essai. Le moyen d'essai que nous avons décidé de concevoir exploitera donc une technique de viscoanalyse. Les viscoanalyseurs classiques utilisent l'équivalence temps-température pour produire un résultat sur une large bande de fréquence, voir par exemple machines Metravib Série DMA+ 100, 150, 450. Nous avons décidé de travailler sur une technologie n'ayant pas besoin de cet artifice pour atteindre les fréquences souhaitées. Le premier viscoanalyseur haute fréquence réalisé au LISMMA était dédié à la mesure de rigidité de cisaillement sous pré-charge dans la direction orthogonale au cisaillement, voir figure 3.1.

Afin d'éviter la mise en oeuvre d'un modèle destiné à déterminer l'état de contraintes réel vu par les éléments viscoélastiques, nous avons conçu un montage permettant de produire un état de contrainte de compression statique quasi uniforme des échantillons et un état de contrainte de cisaillement dynamique, lui aussi uniforme par rapport aux dimensions des éprouvettes, voir figure 3.2. Les trois plans de symétrie du montage permettent d'obtenir des états de contraintes de cisaillement très purs. Pour la compression, outre le plan de symétrie vertical, la forme de la mâchoire a été optimisée pour que les forces exercées par la vis de pré-charge (verticale au centre sur la photo 3.1) soient reprises par toutes les surfaces des échantillons.

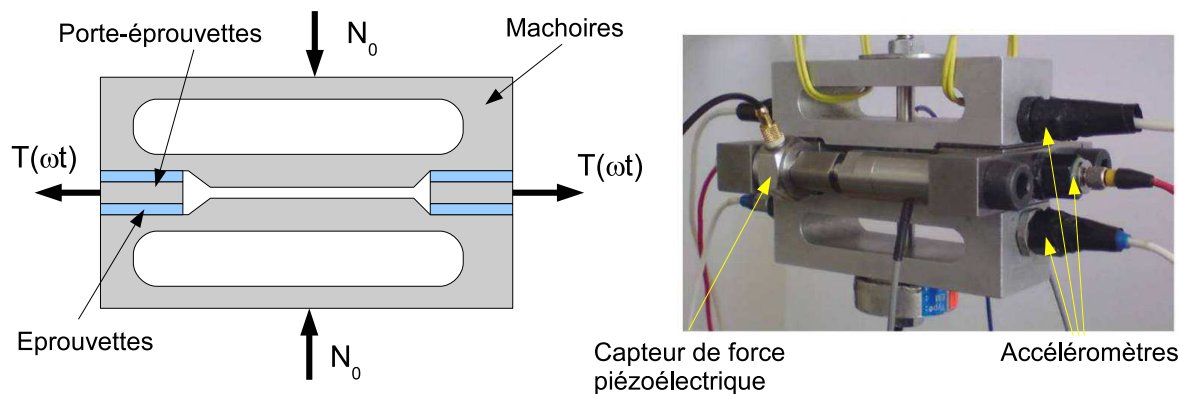


FIGURE 3.1 – Gauche : schéma de principe d'un viscoanalyseur pour le cisaillement avec dispositif de mise en charge. Droite : photo du dispositif dans sa version définitive.

Le lecteur peut trouver beaucoup plus de détails sur cette optimisation dans le manuscrit de thèse de Franck Renaud<sup>1</sup>

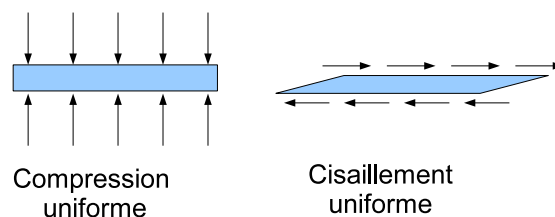


FIGURE 3.2 – Gauche : état de contraintes de compression statique dans les éprouvettes. Droite : état de contraintes de cisaillement dynamique dans les éprouvettes.

Pour exercer les forces de cisaillement dynamique, ce sont des actionneurs piézoélectriques (fréquemment appelés stack à cause de leur construction sous forme d'empilement de couches de céramiques) qui ont été intégrés au montage. Leur relativement faible masse et leur grande rigidité leur permet d'exercer des forces importantes ( $>500$  N) dans la totalité de la bande de fréquence visée. Le point faible de ces actionneurs est en revanche leur faible course (quelques  $\mu m$ ). Cette course a même tendance à chuter avec la fréquence de l'excitation à cause de la limitation de puissance des amplificateurs. En effet, pour un composant capacitif, la puissance consommée peut s'écrire :

$$P = 2\pi f C V_p^2 \quad (3.1)$$

Dans cette équation,  $C$  est la capacité de l'actionneur,  $f$  est la fréquence et  $V_p$  la tension d'alimentation. En tenant compte de cette limite, de la rigidité des échantillons et de la loi de comportement du stack, on peut déterminer la course maximum que va fournir le stack. Ainsi pour un échantillon rigide ( $G = 40\text{Mpa}$ ), le stack P84210 aura une course de  $4\mu m$  à  $800\text{Hz}$  et de  $1.8\mu m$  à  $5000\text{Hz}$ . Cette limitation n'est pas trop gênante dans la mesure où les sollicitations vibratoires réelles chutent également avec la fréquence (pour plus de détails, voir [? ]). Afin de pouvoir successivement "tirer" et "pousser" le porte-échantillon, ce sont des stacks pré-chargés qui ont été utilisés. Sur la photo 3.1, les stacks sont des PI P84210.

Un des points difficiles lors de la conception de ce type de moyen d'essai est de parvenir à éliminer un maximum de modes de vibrations de la bande de fréquence d'intérêt. Le premier axe pour éviter les modes parasites a été de concevoir une structure entièrement suspendue, donc isolée du monde extérieur, voir

1. [http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/58/52/69/PDF/Archivage\\_Renaud.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/58/52/69/PDF/Archivage_Renaud.pdf)

photo 3.1, les élastiques sont jaunes. Ce montage présente le double avantage d'être ni pollué par des modes vibratoires liés à la fixation du viscoanalyseur sur son support, ni pollué par des sources d'excitation liées à l'environnement vibratoire du laboratoire. Le montage suspendu est à notre connaissance particulièrement original dans le domaine de la viscoanalyse. Pour que ce type de montage soit possible, là encore la symétrie est nécessaire puisque c'est elle qui garantit la reprise d'effort, sans qu'il n'y ait de risque de séparation de certains composants. Dans le cas de ce viscoanalyseur, les efforts appliqués par les stacks sont repris successivement par les portes-éprouvettes, puis par les éprouvettes et enfin par les mâchoires. Il faut d'autre part éviter la présence de modes internes à la structure durant l'essai. Un soin particulier a été porté à la géométrie de chacune des pièces pour éviter la présence de modes internes excitables par l'actionnement des patchs. Pour éviter la présence des modes, c'est la compacité du montage qui reste le meilleur atout. Dans sa version définitive, le montage tient dans une main. Après optimisation de la géométrie, le premier mode du montage est finalement lié à la rigidité de cisaillement des échantillons. Afin de pouvoir élargir la bande de fréquence utile, il est donc nécessaire d'utiliser des échantillons les plus fins possible. Toutefois, il n'est parfois pas possible d'atteindre les  $5000\text{ Hz}$  visés.

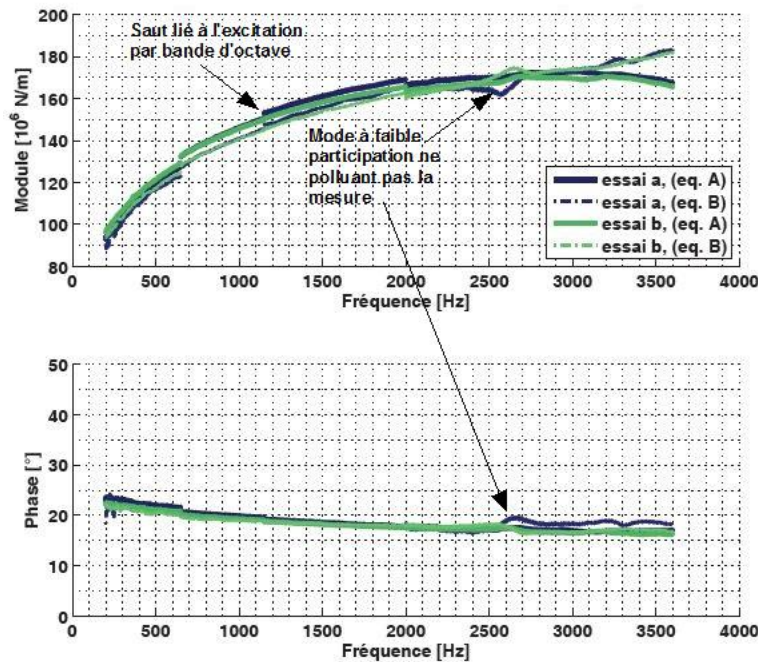


FIGURE 3.3 – Courbes maitresses exprimées en module et phase de la rigidité linéique d'un échantillon de matériau viscoélastique

Le banc est instrumenté avec des capteurs de forces montés en bout d'actionneur et des accéléromètres, voir figure 3.1, qui sont les capteurs cinématiques ayant la meilleure précision à ces fréquences. Les accéléromètres sont au nombre de six pour mesurer les mouvements absolus de chaque porte-éprouvettes, mais également la déformation des mâchoires. Deux procédures de post-traitement ont été mises en équation tenir compte des déformations des mâchoires et pour retrancher les forces consacrées à vaincre l'inertie des portes-éprouvettes. Nous ne détaillons pas ces procédures mais le lecteur doit savoir qu'elles sont indispensables et que les mesures brutes ne permettent pas de déterminer les comportements à hautes fréquences. Plus de détails dans [?] en annexe de ce mémoire.

Pour illustrer les capacités de ce montage, un résultat est présenté dans la figure 3.3. Ce résultat permet d'apprécier la largeur de bande de la caractérisation. Un mode de structure à faible participation est visible mais il ne pollue pas outre mesure l'essai. Notons également que les essais se font par balayage en fréquence

sur une bande d'octave. La courbe présente plusieurs essais mis bout à bout, d'où les légers sauts visibles sur la courbe.

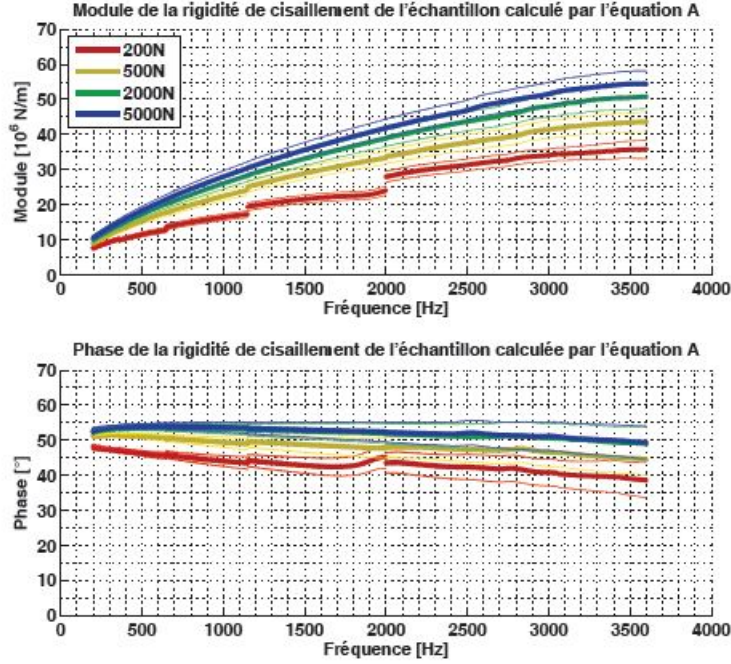


FIGURE 3.4 – Courbes maitresses exprimées en module et phase de la rigidité linéïque d'un échantillon de matériau viscoélastique. Faisceau de courbes montrant l'effet de la précharge exercée dans l'axe orthogonal au cisaillement par la vis de serrage.

L'autre aspect des capacités du viscoanalyseur est de pouvoir caractériser un matériau en cisaillement en fonction de la pré charge qui lui est appliquée. Sur la figure 3.4, la pré charge [200N 5000N] exercée par la vis et contrôlée durant tout l'essai accentue la rigidification du matériau et la valeur de la phase. Le concept illustré ici a été étendu récemment pour effectuer des tests à plus haute fréquence et pour d'autres modes de sollicitation. Un nouveau banc d'essai a été développé autour d'un actionneur produit par la société CEDRAT Technologies. Ce nouveau banc a fait l'objet d'un brevet [?] et les premiers essais laissent penser que la barre des  $10kHz$  pourra être franchie lors de test sur des échantillons rigides. En dehors de ce brevet, aucune communication n'a encore été publiée, c'est pourquoi le lecteur devra faire preuve d'un peu de patience pour en savoir plus !

### 3.3 Simulation

Cette section porte sur le portage des modèles viscoélastiques dans le calcul des valeurs et vecteurs propres complexes du problème d'élastodynamique des structures. Dans l'introduction, nous avons rappelé les équations gouvernant ce type de problème dans lequel une partie de la structure est constituée d'une partie élastique et d'un matériau viscoélastique dont le comportement est régi par une série de fractions rationnelles.

$$s^2 M \hat{U} + K_e \hat{U} + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \tau_j s}{\tau_j s + 1} K_v \hat{U} = 0 \quad (3.2)$$

Dans lequel  $K_e$  désigne la rigidité élastique sur tout le domaine et  $K_v$  la rigidité statique, encore appelée rigidité à long terme. Déterminer les valeurs et vecteurs propres complexes nécessite la résolution du système

d'état suivant :

$$s \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 I & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_n I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(1)} \\ \hat{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{U}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ -K_e & 0 & -\alpha_1 K_v & \cdots & -\alpha_1 K_v \\ 0 & \tau_1 I & -I & & \\ & \vdots & & -I & \\ 0 & \tau_n I & & & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(1)} \\ \hat{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{U}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dans la suite, nous discuterons l'opportunité d'effectuer une réduction cinématique de ce problème avec une perte minimale d'informations. Puis, nous reformulerons le problème pour le cas intéressant des structures constituées de plusieurs matériaux ou de matériaux anisotropes ou plus largement de la présence de plusieurs lois de relaxation différentes.

### 3.3.1 Réduction de modèles

Le problème 3.3 peut se révéler de grande taille si le nombre de degrés de liberté cinématique est grand et si le nombre d'états internes gouvernant la fonction de relaxation du matériau est important. Ainsi la dimension du système d'état est égale au produit du nombre de degrés de liberté cinématiques  $N$  et du nombre d'états internes  $n$  au modèle viscoélastique plus deux, soit  $\dim = N(n + 2)$ . Afin de réduire cette dimension, une stratégie simple consiste à projeter le modèle sur le sous-espace engendré par les vecteurs propres  $\Psi_e$  du problème conservatif :

$$S^2 M \Psi_e + K_e \Psi_e = 0 \quad (3.4)$$

Dès lors, il suffit de décomposer chaque variable interne sur une base  $\Psi_e$  du sous-espace normalisée par rapport à la masse  $\psi_e^T M \psi_e = 1$ , soit :

$$\hat{U}^{(j)} = \psi_e u^{(j)} \quad \forall j \in [0, n + 1] \quad (3.5)$$

Pour obtenir un nouveau système d'état, il faut préalablement modifier le système d'état précédent en multipliant chaque ligne sauf la deuxième par l'opérateur de masse  $M$ . En projetant chaque terme sur la base précédemment définie, on obtient :

$$s \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{u}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ -k_e & 0 & -\alpha_1 k_v & \cdots & -\alpha_1 k_v \\ 0 & \tau_1 & -I & & \\ & \vdots & & -I & \\ 0 & \tau_n & & & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{u}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A partir de ce nouveau système, il est possible d'extraire des valeurs propres  $s_{r_i}$  et des vecteurs propres complexes  $\psi_{r_i}$ . Chacun de ces vecteurs propres peut-être exprimé dans l'espace de départ en utilisant la relation 3.5. Ces vecteurs doivent théoriquement vérifier l'équation 3.3, cependant même si la base de projection constituée des modes réels est bien adaptée, elle ne décrit pas exactement les mouvements engendrés par les phénomènes de relaxation. Ce qui se traduit par l'existence d'un résidu dans l'équation de départ, soit :

$$s_{r_i}^2 M \Psi_e \psi_{r_i} + K_e \Psi_e \psi_{r_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \tau_j s}{\tau_j s + 1} K_v \Psi_e \psi_{r_i} = R_i \quad (3.7)$$

Pour palier à cette inadéquation, il est possible d'ajouter à la base les termes manquants par une méthode d'enrichissement. Un vecteur candidat pour effectuer cette correction n'est autre que le résidu lui-même, en ayant pris soin de le rendre homogène au reste de la base. Pour cela, on utilise l'opérateur de rigidité calculé à une fréquence proche de celle du mode que l'on souhaite calculer, soit :

$$\psi_{c_i} = \left( K_e + \left| \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \tau_j s_{r_i}}{\tau_j s_{r_i} + 1} K_v \right| \right)^{-1} R_i \quad (3.8)$$

Le vecteur ainsi calculé est ajouté à la base précédente après orthonormalisation. Le problème réduit est reconstruit et la simulation correspondant au problème 3.6 est effectuée. On peut répéter cette opération jusqu'à ce que l'évaluateur de la convergence, par exemple le module de la valeur propre complexe, entre deux itérations successives indique que la solution n'évolue plus. Plus de détails sont disponibles dans la thèse de Franck Renaud. L'enrichissement peut être mis en oeuvre grâce à l'algorithme suivant : Cette

---

**Algorithm 4** Calcul d'un mode complexe avec enrichissement de la base réelle de projection

---

- 1: Construire les matrices  $M$ ,  $K_e$ ,  $K_v$ .
  - 2: Extraire la base de modes réels  $\Psi_e^0$  issue du problème 3.4.
  - 3: Calculer les matrices d'état du problème 3.6.
  - 4: Déterminer la  $i^{eme}$  valeur propre  $s_i^0$  et le vecteur propre  $\psi_{ri}^0$  du problème réduit 3.6.
  - 5: Initialiser  $\epsilon_s = s_i^0$
  - 6: **while**  $\epsilon_s < \text{erreur admise}$  **do**
  - 7:   Déterminer le résidu  $R_i$  d'après 3.7.
  - 8:   Déterminer  $\psi_{ci}$  d'après l'équation 3.8
  - 9:   Déterminer la base  $\Psi_e^{(j)}$  par ajout de  $\psi_{ci}$  et orthonormalisation.
  - 10:   Calculer les matrices d'état du problème 3.6.
  - 11:   Déterminer la valeur propre  $s_i^{(j)}$  et le vecteur propre  $\psi_{ri}^{(j)}$  du problème réduit 3.6.
  - 12:   Calculer  $\epsilon_s = s_i^{(j)} - s_i^{(j-1)}$
  - 13: **end while**
- 

méthode est très efficace en terme de précision mais peut se révéler assez couteuse en temps de simulation. Il faut entre autre inverser l'opérateur de rigidité, voir équation 3.8. Dans la pratique, nous avons privilégié une méthode intuitive qui consiste à adjoindre à la base  $\Psi_e$  une base  $\Psi_e^{HF}$  obtenue par résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$S^2 M \Psi_e^{HF} + \left( K_e + \sum_{i=1}^n \alpha_i K_v \right) \Psi_e^{HF} = 0 \quad (3.9)$$

L'orthonormalisation de chacun des vecteurs de cette nouvelle base par rapport à la précédente permet d'obtenir une base de très bonne qualité pour la viscoélasticité. Les travaux publiés dans [?] et certains travaux sur le cisement exploitent ce résultat. L'algorithme suivant permet de mettre en oeuvre la méthode :

---

**Algorithm 5** Calcul d'un mode complexe à partir d'une base enrichie a priori

---

- 1: Construire les matrices  $M$ ,  $K_e$ ,  $K_v$ .
  - 2: Extraire la base de modes réels  $\Psi_e$  issue du problème 3.4.
  - 3: Extraire la base de modes réels  $\Psi_e^{HF}$  issue du problème 3.9.
  - 4: Orthonormalisation de la base constituée des deux bases  $\Psi_e$  et  $\Psi_e^{HF}$ .
  - 5: Calculer les matrices d'état du problème 3.6.
  - 6: Déterminer la  $i^{eme}$  valeur propre  $s_i$  et le vecteur propre  $\psi_{ri}$  du problème réduit 3.6.
- 

### 3.3.2 Pôles communs

Dans les cas complexes que nous avons eu à traiter, notamment sur les freins, plusieurs matériaux viscoélastiques ayant des fonctions de relaxation différentes étaient présent. Cette configuration peut-être également rencontrée lorsque des matériaux anisotropes du point de vue viscoélastique sont présents dans la structure. Dès lors, le problème de départ s'exprime de la manière suivante (on considère d'emblée de jeu le modèle

réduit, mais les écritures sont très proches) :

$$\left[ s^2 + k_e + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s}{\tau_{ij} s + 1} \right) k_{vi} \right] u = 0 \quad (3.10)$$

Dans cette formulation, il y a  $m$  fonctions de relaxation différentes et chacune d'entre elles est régie par une série de fractions rationnelles comprenant  $n_i$  termes. Les constantes  $\alpha_{ij}$  et  $\tau_{ij}$  désignent les constantes liées à la  $i^{me}$  fonction de relaxation et à la  $j^{me}$  fraction rationnelle. Les rigidités  $k_{vi}$  sont associées à la  $i^{me}$  fonction de relaxation. Pour passer ce problème sous une forme d'état, il faut effectuer le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(1)} &= s\hat{u} \\ \hat{u}_i^{(j)} &= \frac{\tau_{ij}}{\tau_{ij}s + 1} \hat{u}^{(1)} \\ s\hat{u}^{(1)} + k_\infty \hat{u} + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \hat{u}_i^{(j)} \right) k_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Un tel changement de variable produit  $m * n_i$  vecteurs d'état interne si chaque fonction de relaxation à  $n_i$  fractions rationnelles. La possibilité a alors été étudiée de choisir les mêmes constantes de temps  $\tau_{ij}$  pour chaque matériau  $i$ . Cette hypothèse permet de réduire considérablement le nombre d'états internes puisque l'équation de départ devient alors :

$$\left[ s^2 + k_e + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{\tau_j s}{\tau_j s + 1} \right) k_{vi} \right] u = 0 \quad (3.12)$$

Il suffit alors d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(1)} &= s\hat{u} \\ \hat{u}^{(j)} &= \frac{\tau_j}{\tau_j s + 1} \hat{u}^{(1)} \\ s\hat{u}^{(1)} + k_\infty \hat{u} + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \hat{u}^{(j)} \right) k_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ce qui limite évidemment le nombre d'états internes à  $n_i$  qui est le même nombre que dans la formulation 3.6. L'écriture du système d'état et des résultats de simulation comparés entre les deux hypothèses, pôles communs et pôles distincts sont discutés dans [? ]. Cette démarche simplifie considérablement les coûts de simulation et reporte l'effort sur la tâche d'identification, voir section suivante. La validité de cette hypothèse est illustrée sur la figure 3.5. Sur cette courbe, sont superposées la FRF du problème conservatif, les deux FRF correspondant aux hypothèses "pôles non communs" et pôles communs", ainsi que l'écart numérique entre les deux courbes.

### 3.4 Identification

L'identification des paramètres des modèles à fractions rationnelles consiste à trouver les paramètres  $\alpha$  et  $\tau$  qui minimisent les écarts entre les résultats des essais de caractérisation en terme de module et de phase et les modules et phases modélisés. La méthode a été publiée dans une première version dans [? ] suite à la communication effectuée au colloque VCB [? ]. Une deuxième version contenant quelques améliorations a ensuite été publiée dans [? ].

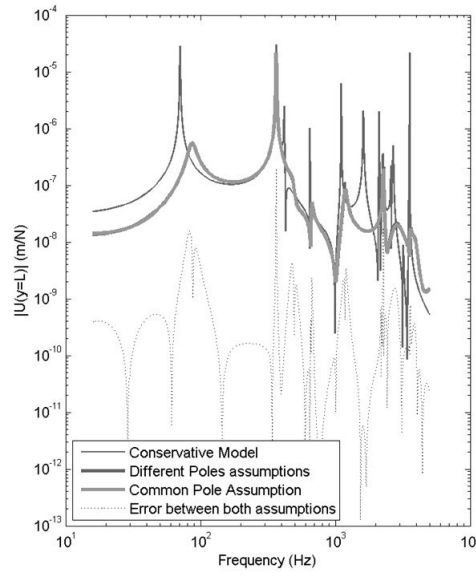


FIGURE 3.5 – Fonction de réponse en fréquence pour une structure viscoléastique comportant plusieurs matériaux viscoélastiques, voir [?] pour une description de la structure de test.

### 3.4.1 Principes généraux

Le modèle de Maxwell Généralisé peut se mettre indifféremment sous la forme d'une série de fractions rationnelles définie dans l'introduction de ce mémoire ou d'un produit de fractions. Ce résultat peut être consulté dans la thèse de Jean-Luc Dion<sup>2</sup> ou dans l'ouvrage de A. Oustaloup<sup>3</sup>. Nous le rappelons ici :

$$H(s) = H_v \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \tau_i s}{1 + \tau_i s} \right) = H_v \prod_{i=1}^n \frac{1 + s/z_i}{1 + s/\tau_i} \quad (3.14)$$

Dans cette équation les  $\tau_i$  sont les pôles de la fonction de transfert, tandis que les  $z_i$  sont les zéros. Les paramètres  $\alpha_i$  sont liés aux pôles et aux zéros grâce à la relation suivante :

$$\alpha_i = \prod_{h=1}^n \frac{\tau_h}{z_h} \frac{\tau_i - z_h}{\tau_i + \tau_h(\delta_{ih} - 1)} \quad (3.15)$$

où  $\delta_{ih}$  est le symbole de Kronecker. L'identification se passe en deux temps. Tout d'abord, on utilise les propriétés de l'écriture sous forme de produit pour approximer le résultat identifié par une méthode d'identification simplifiée dans un plan à échelle logarithmique. Dans [?], trois méthodes sont proposées, la méthode des asymptotes est la plus intuitive. Il suffit de considérer que chaque couple pôle-zero ( $\tau_i, z_i$ ) produit une évolution de module affine en fonction de la fréquence dans un espace logarithmique et une rotation de phase qui n'excède pas 90 degrés entre le zéro et le pôle, voir figure 3.6. Renaud montre que l'aire sous la courbe réelle [?] de phase doit être identique à l'aire sous la courbe asymptotique, ce qui permet d'évaluer l'écart entre le zéro et le pôle. De même la rigidification réelle peut être correctement approximée en considérant la rigidification asymptotique qui elle aussi contraint localement l'écart entre chaque zéro et chaque pôle. Une pondération entre approximer au mieux la phase ou approximer au mieux le module est ensuite possible. Cette initialisation produit un modèle dont la tendance globale est bonne, voir 3.7. Il n'est pas très utile de produire un gros effort pour optimiser le nombre de couples zero/pôle. En effet, un nombre trop faible

2. Modélisation et identification du comportement dynamique des liaisons Hydro-Elastiques, 1995

3. La commande CRONE : du scalaire au multivariable, 1999



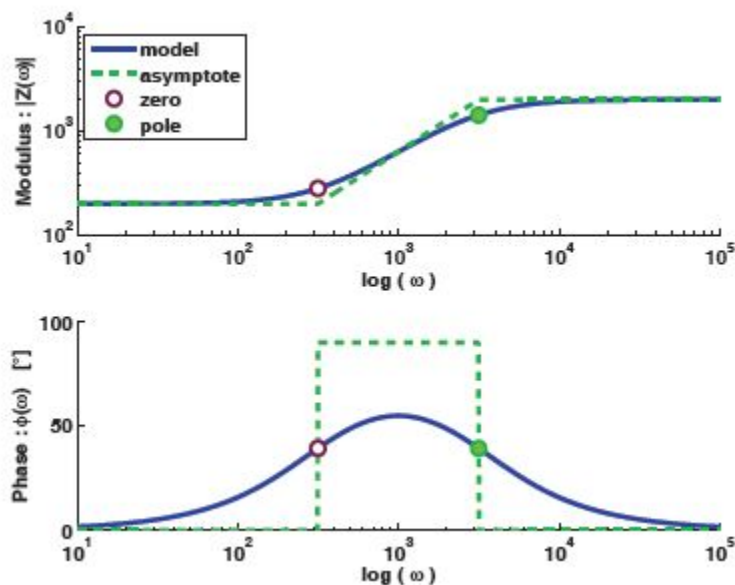


FIGURE 3.6 – Asymptotes sur une fraction rationnelle du modèle. Phase à 90 degrés et module affine.

de couples a tendance à faire osciller les courbes de modules et phase. On montre empiriquement qu'il est raisonnable de ne pas descendre en dessous d'un couple par décade de fréquence. Ensuite le placement des zéros et pôles est affiné en utilisant une méthode numérique d'optimisation. Avant tout, il faut constater le fait qu'à une fréquence particulière de la courbe maîtresse la valeur de module et de phase est non seulement produite par le couple pôle-zéro le plus proche mais aussi par les couples voisins. Une optimisation locale des courbes maitresses est donc effectuée mais en agissant sur les couples éloignés en fonction de leurs influences respectives. Le détail de la méthode est donné dans [? ].

### 3.4.2 Pôles communs

Le problème d'optimisation résolu dans la section précédente, n'est pas très contraint dans la pratique surtout si le nombre de termes dans la fonction de relaxation est suffisant. Il est donc tentant d'imposer les pôles  $\tau_i$  et de se contenter de réaliser l'optimisation en n'identifiant que les zéros. Cette démarche permet d'utiliser les pôles déterminés pour une première fonction de relaxation et de garantir ainsi des pôles communs pour toutes les fonctions de relaxation utilisées. Dans la pratique, il s'avère que cette démarche demande en général quelques couples de pôle-zéro supplémentaires par rapport à la méthode sans contrainte. Les deux figures 3.8 et 3.9 illustrent le propos. Dans celles-ci, trois matériaux fictifs sont décrits par leur phase respectivement constante, affine croissante et affine décroissante tracées en trait fin. On se donne également un module à long terme. L'objectif est d'avoir un nombre de pôles limitant les oscillations caractéristiques de ce type de modèle et qui reproduit au mieux la courbe cible. La bande de fréquence d'intérêt est [10-10000] Hz. Dans le cas de l'hypothèse "pôle non-communs", il faut cinq pôles pour obtenir un résultat satisfaisant. On observe que les pôles ne sont pas communs mais que les couples zéros/pôles de chaque matériau se situent à des fréquences voisines. Dans un deuxième temps nous fixons la position des pôles et l'optimisation ne porte que sur les zéros. Pour faciliter l'optimisation, nous utilisons un couple zéros-pôles de plus. La courbe obtenue est visuellement très satisfaisante. Dans les outils logiciels, nous utilisons un critère numérique de convergence pour notre optimisation. La définition de ce critère peut être consulté dans [? ].

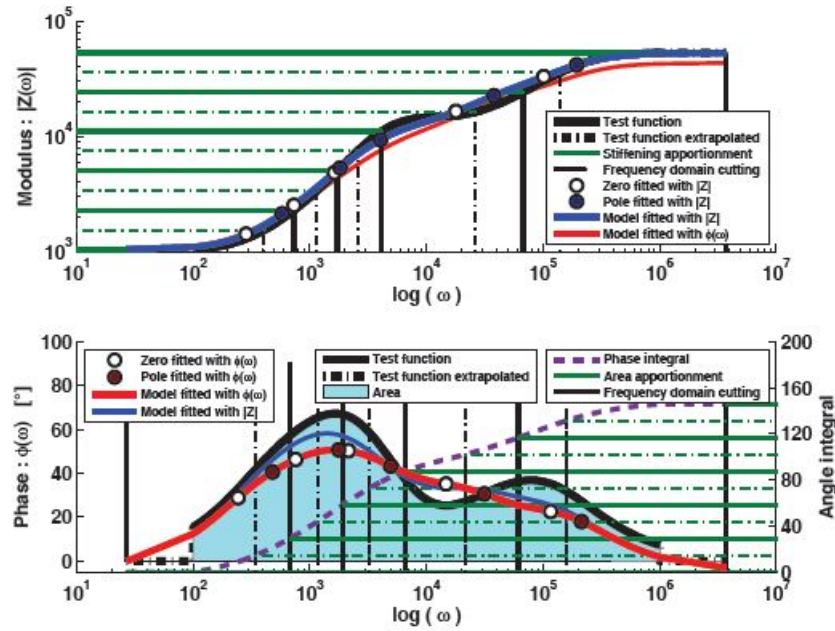


FIGURE 3.7 – Courbe de test identifiée asymptotiquement en considérant l'aire sous la phase et la rigidification du module séparément

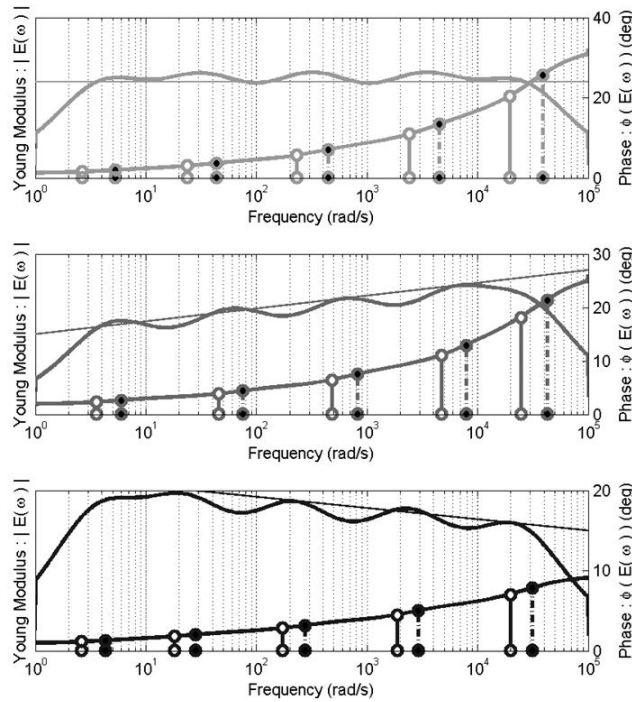


FIGURE 3.8 – Identification de trois matériaux sans hypothèse de pôles communs. Cinq couples sont nécessaires pour obtenir les phases tracées en traits fins.

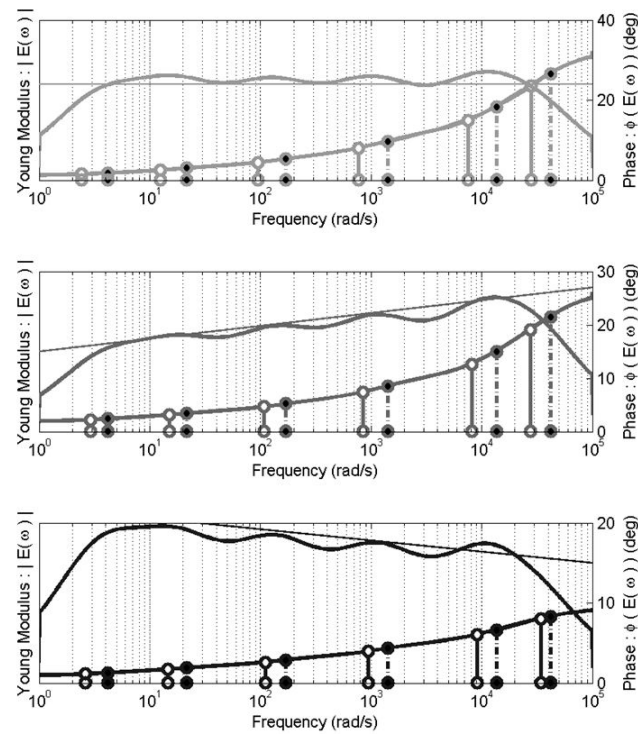


FIGURE 3.9 – Identification de trois matériaux avec hypothèse de pôles communs. Six couples sont nécessaires pour obtenir les phases tracées en traits fins identiques à celles de la figure 3.8

### 3.5 Conclusions et perspectives

Ces travaux avaient pour ambition le développement d'outils de caractérisation à fréquence élevée, d'outils de simulation adaptés à l'extraction de valeurs propres complexes et d'un outil d'identification pour faire le lien entre les deux. Ces objectifs ont été atteints et l'intégration des contraintes de simulation a permis de produire un ensemble logiciel cohérent qui permet des gains en terme de cout de simulation par le report de certaines contraintes dans l'identification.

Les perspectives de ces travaux et les travaux actuellement en cours portent plutôt sur le développement de moyens de caractérisation capable de fréquences plus élevées mais aussi d'amplitudes de sollicitations plus importantes pour mettre en évidence des comportements non-linéaires et les caractériser. Metravib a, de son côté, développé un moyen exploitant une masse sismique pour isoler son viscoanalyseur. Ce moyen, nommé Metravib *VHF104*, est donné pour une fréquence maximum de  $10kHz$ . Une comparaison de nos moyens d'essais avec les moyens développés par Metravib est un enjeu important pour la suite de ces travaux. L'autre challenge est d'utiliser ces moyens d'essai à température différente de l'ambiante. A priori, les actionneurs et les capteurs peuvent fonctionner dans une gamme de température assez large. Du point de vue de la simulation, le développement de formulations permettant de prendre en compte les comportements non-linéaires du type effet Payne est à l'étude.

### Références du Chapitre

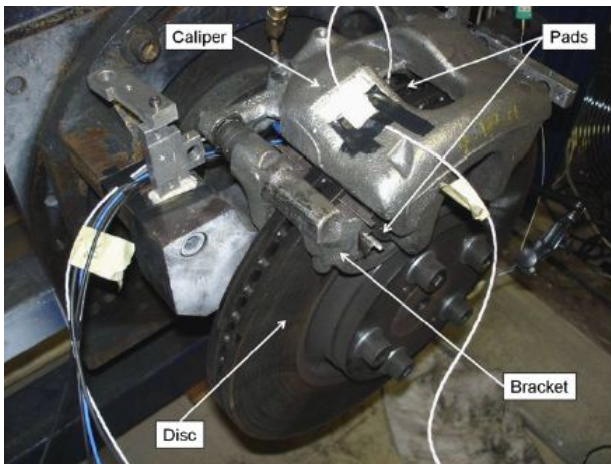
- [1] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement. Lyon (France), 2008. Colloque Vibrations, Chocs et Bruits.
- [2] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. An identification method for the modelling of damping by the generalised maxwell model. *Mécanique & Industries*, 11(1) :47–55, June 2010.
- [3] G. Chevallier, F. Renaud, S. Thouviot, and J.-L. Dion. Complex eigenvalue analysis for structures with viscoelastic behavior. Washington DC, 2011. ASME IDETC.
- [4] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Viscoelasticity measurement and identification of viscoelastic parametric models. Washington DC, 2011. ASME IDETC.
- [5] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, and R. Lemaire. A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized maxwell model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :991–1010, April 2011.
- [6] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Viscoanalyseur à haute fréquence avec précharge axiale, 07 2012.



## Chapitre 4

# Instabilités provoquées par le frottement

*Avec le violon, il faut choisir :  
ou bien tu joues juste, ou bien tu joues tzigane*  
Boby Lapointe, Chanteur Français (1922-1972)



### Résumé du Chapitre

Ce chapitre traite du crissement de frein, vu comme une instabilité provoquée par le frottement. Tout d'abord, nous présentons les mesures cinématiques ont permis de reconstituer le mouvement d'une plaquette. Nous présentons ensuite le développement d'un outil de simulation permettant la prise en compte réaliste de l'amortissement. Enfin une étude critique des solutions technologiques actuelles d'atténuation du bruit est présentée.

## 4.1 Introduction et contexte de ces travaux

Les instabilités provoquées par le frottement peuvent être rencontrées dans différents mécanismes et agissent à basse ou haute fréquence. Dans ces travaux, c'est le crissement de frein qui a retenu notre intérêt. Le crissement des freins est étudié depuis de nombreuses années. Les premiers travaux ont focalisé sur l'explication du phénomène, en proposant des causes liées à la tribologie (coefficient de frottement, rugosité, pressions de contact, etc) et à l'environnement (température, humidité, etc). Le crissement a ensuite été perçu comme une instabilité par flottement autour du glissement stationnaire, assez analogue dans son principe aux instabilités aéroélastiques. Les premiers modèles reproduisant le phénomène étaient assez réduits et ne permettaient pas vraiment de réaliser des études dont les paramètres relèvent de la géométrie fine ou des comportements des matériaux. Avec l'avènement des méthodes numériques et des centres de calculs de plus en plus performants, les ingénieurs peuvent produire des modèles extrêmement détaillés géométriquement mais aussi du point de vue des comportements des matériaux et de la tribologie. Ces simulations peuvent porter sur les conditions d'occurrence de l'instabilité. Dans ce cas, c'est l'extraction des valeurs propres d'un problème linéarisé qui est l'outil mathématique. Elles peuvent aussi porter sur la détermination de cycles limites pour donner une indication sur l'amplitude vibratoire et donc le bruit émis. Dans ce cas, ces sont des simulations temporelles qui sont produites sur des modèles très détaillés, voir par exemple la thèse de G. Verriot des Roches<sup>1</sup> ou encore des simulations du régime permanent par la méthode de la balance harmonique ou des méthodes concurrentes qui sont déployées sur des modèles réduits.

Parallèlement, les fabricants de systèmes de freinage cherchent des solutions technologiques pour palier au problème. Depuis quelques années, ce sont les dispositifs viscoélastiques qui sont disposés à différents endroits du frein et notamment au dos des plaquettes qui sont chargés d'éliminer les bruits.

Ces travaux qui sont décrits dans cette synthèse portent sur la compréhension du rôle de ces matériaux. La scène se déroule en trois actes. Tout d'abord, nous avons cherché à comprendre quel était le mouvement d'une plaquette dans un frein lors du crissement. Cette information devait nous permettre d'imaginer les sollicitations que subissent les dispositifs viscoélastiques situés au dos des plaquettes. Deuxièmement, nous avons mis au point des outils numériques pour tenir compte de la présence de matériaux viscoélastiques. Enfin nous avons exploité ces outils pour analyser numériquement sur des modes instables quelles étaient les sollicitations que subissait les éléments viscoélastiques.

## 4.2 Etude expérimentale du mouvement

Ces travaux publiés dans [?] et dans [?] avaient pour ambition de reconstruire les déformations opérationnelles d'une plaquette de frein pendant une occurrence de crissement. Nous nous sommes intéressés à la plaquette parce que des deux solides en contact dans un frein, c'est celui qui a été le moins étudié. Les déformées du disque en opération ont été largement étudiées, voir par exemple Fieldhouse et al.<sup>2</sup> ou Gianini et al.<sup>3</sup>. Toutes les études s'accordent à montrer que les premiers modes de crissements sont liés à une flexion du disque sur des modes à lobes très caractéristiques. Ce résultat a également été montré grâce à la simulation numérique par de nombreux auteurs. La connaissance des mouvements et déformations que subissent les plaquettes présente un grand intérêt pour décider quel doit être le dispositif amortissant à mettre en oeuvre pour éliminer le crissement. L'autre originalité de ces travaux réside dans le fait que les tests ont été effectués sur un banc de freinage industriel grâce à l'aide de Guillaume Taudière, ingénieur chez Bosch systèmes de freinage. Plusieurs questions étaient en suspens avant les résultats de ces essais : la plaquette se comporte-t-elle rigidement ? Le mouvement de la plaquette produit-il des impacts avec les pièces environnantes ? Existe-t-il des phases des ondes d'adhérence-glissement dans le contact ? Le mouvement de la plaquette est-il un mouvement de vibrations stationnaires ?

---

1. Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes, 2011  
2. Double pulsed holography used to investigate noisy brakes, Optical Diagnostics in the Automotive Industry, 1996  
3. Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup, JSV 2006

### 4.2.1 Instrumentation du moyen d'essai

Le moyen d'essai est un banc de freinage industriel, voir photos en annexe dans [?] et sur la page de garde de ce chapitre, dans lequel le disque est mis en rotation par un moteur électrique. Pendant les essais, la vitesse de rotation du disque est maintenue constante ( $2.62Hz$ ) grâce un asservissement dont la boucle de contrôle fonctionne à  $300Hz$ . Nous verrons que cette fréquence est visible sur les spectres, mais elle n'est pas due à une instabilité ou même à une vibration mécanique. La pression de freinage est modifiable pendant l'essai et mesurable pendant l'essai. Ce point est important car la pression s'est révélée être un facteur très important tant du point de vue de la mise en place de l'instabilité que du point de vue de la fréquence des vibrations observées. Pour mesurer les mouvements, la plaquette a été instrumentée de six capteurs accélérométriques tri-axes, soient 18 axes de mesures cinématiques du mouvement. L'essai présenté dure 14 secondes et peut être divisé en huit phases caractérisées par différents niveaux de pression, voir figure 4.2.

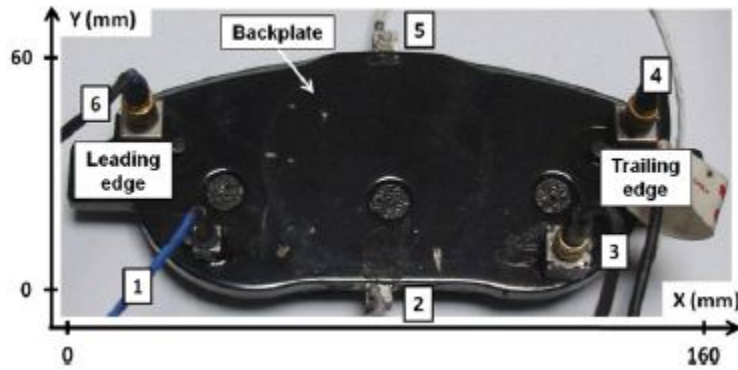


FIGURE 4.1 – Vue de l'instrumentation de la plaquette. Position des six accéléromètres 3 axes.

### 4.2.2 Résultats bruts et post-traités

Analysons le résultat de la figure 4.2 en haut ; pendant la phase 1, la pression augmente doucement jusqu'au début de la phase 2 au cours de laquelle, le niveau vibratoire augmente. Lorsque la pression est suffisante, l'instabilité apparaît avec une croissance exponentielle caractéristique d'une instabilité (phase 3). A l'issue de cette phase, une phase d'amplitude constante intervient, il s'agit d'un cycle limite dont l'amplitude est quasi constante pendant une seconde. Ensuite l'augmentation de la pression entraîne une réduction des amplitudes vibratoires jusqu'à leur disparition. Elle réapparaissent pour une valeur de pression particulière puis disparaissent définitivement au delà de 8 bars.

Le spectrogramme qui est tracé sur le bas de la figure 4.2 apporte une information sur le contenu spectral instantané du signal de mesure. L'instabilité apparaît à une pression proche de trois bars, sa fréquence fondamentale est alors de  $1515Hz$ . Deux harmoniques apparaissent ensuite de manière synchrone avec le cycle limite. C'est donc vraisemblablement une non-linéarité qui bride l'amplitude vibratoire ; ce qui est conforme aux résultats produits dans les travaux analytiques ou numériques. Les fréquences, fondamentale et harmoniques, augmentent ensuite en même temps que la pression augmente, ce qui est symptomatique d'une augmentation de la rigidité des composants sollicités par le mode sous l'effet de la pré-charge liée à la pression de freinage. La cause de la non linéarité et sa localisation spatiale reste à ce jour un sujet ouvert.

Le mouvement et la déformation de la plaquette ont ensuite été déterminés en utilisant l'ensemble des signaux émis par les accéléromètres. Pour reconstruire les mouvements, les signaux sont d'abord filtrés puis une interpolation permet de reconstruire une image de la déformée sur une grille plus raffinée géométriquement que le maillage expérimental. L'image fait apparaître une flexion de la plaquette d'une amplitude d'environ  $1\mu m$ . Cette amplitude et la fréquence des oscillations laissent penser que l'adhérence même partielle de la plaquette sur le disque est peu probable. En revanche il est possible que les mouvements de flexion entraînent des chocs de la plaquette sur le disque ou sur les différentes parties de l'étrier. Ce qui est conforté par le fait



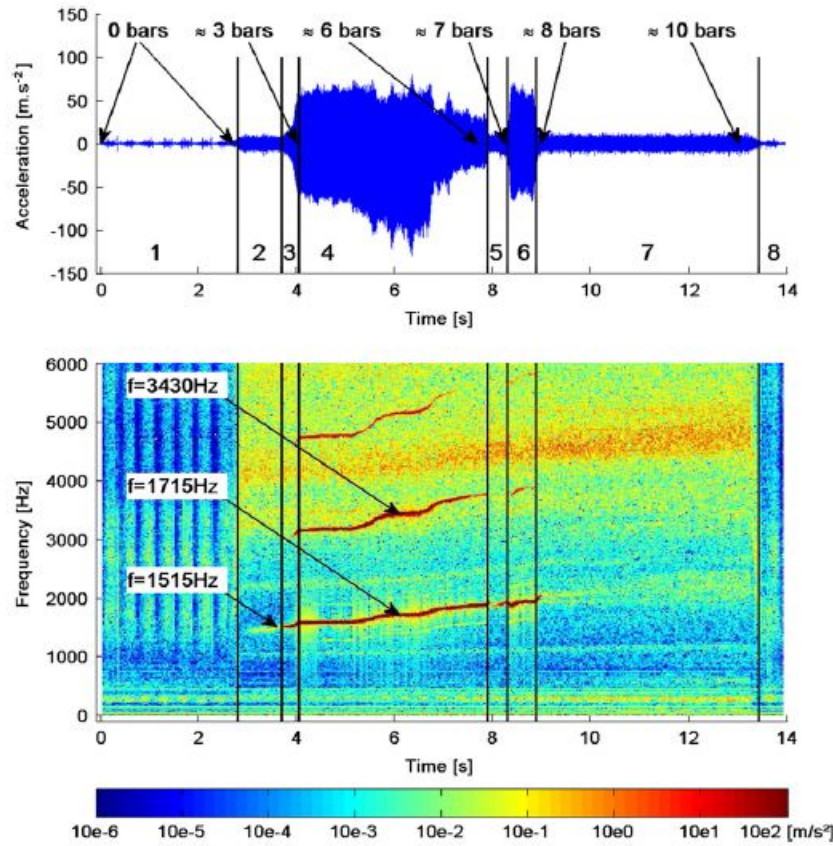


FIGURE 4.2 – Haut : tracé d’une des mesures accélérométriques en fonction du temps. Définition des phases de fonctionnement. Bas : spectrogramme de la mesure du haut.

que certains signaux temporels ne sont pas symétriques par rapport à l’amplitude nulle. C’est le cas sur la figure 4.2. L’animation disponible sur le site dont l’adresse est dans la légende de la figure fait apparaître un mouvement de reptation de la plaquette. Ce qui conforte l’idée d’un mode propagatif ou mode complexe.

### 4.2.3 Discussion

Ces travaux ont permis de mettre en évidence le mouvement d’une plaquette dans un frein industriel. Le mouvement de flexion combiné au mouvement de reptation renforce l’idée que des butées viscoélastiques entre la plaquette et l’étrier dans les différentes zones de contact entre les deux pièces pourraient amortir les instabilités. A ce stade, nous manquons d’informations plus locales sur les sollicitations entre les pièces. Ce point semble relativement inaccessible avec des moyens expérimentaux classiques. L’analyse numérique pourrait être utilisée comme outil de réalité augmentée pour établir l’état des sollicitations entre pièces. C’est l’objet de la section 4.4.

## 4.3 Mise au point d’un outil de simulation

Les travaux de simulation réalisés au LISMMA portent sur l’analyse de la stabilité du glissement stationnaire. Cette approche est très utilisée depuis quelques années, au point que certains codes de calculs industriels, comme ABAQUS, intègrent un module de simulation dédié. Rappelons les fondements de cette

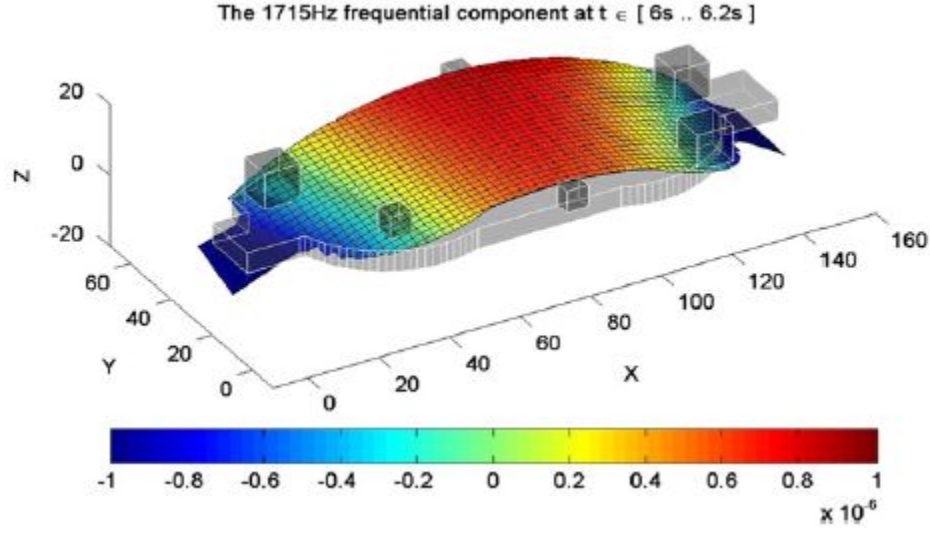


FIGURE 4.3 – Mouvement de flexion de la plaquette lors pendant la phase de crissement. Une animation est consultable sur <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327012002622>.

approche qui se déroule en trois temps. L'équation sur laquelle nous travaillons est la suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{u} + \mathbf{K}u = f_{ext} - f_{cf}(u, \dot{u}) \quad (4.1)$$

Elle est obtenue à partir des équations de la mécanique des milieux continus, dans lesquelles les forces de contact et de frottement  $f_{cf}$  sont régies par les modèles de Signorini régularisé et de Coulomb. La construction des opérateurs est effectuée grâce au logiciel ABAQUS. Le premier temps est la résolution de l'équation statique qui permet de déterminer l'état de glissement stationnaire. Cet état correspond au fonctionnement dans lequel la vitesse du disque est constante  $\bar{u}^0 = cste$  et les forces extérieures sont principalement les pressions hydrauliques qui plaquent les plaquettes sur le disque. Il s'agit de résoudre le problème statique non-linéaire suivant qui permet de déterminer les déformations de l'ensemble du mécanisme pendant une phase de freinage.

$$\mathbf{K}u^0 = f_{ext} - f_{cf}(u^0, \bar{u}^0) \quad (4.2)$$

Le deuxième temps est la linéarisation du modèle autour de cette position. On pose  $u = u^0 + \tilde{u}$ .  $\tilde{u}$  désigne une perturbation de l'état de déformation précédemment déterminé. Une force de rappel élastique linéaire est également construite en linéarisant les forces de contact et frottement autour de la position  $u^0$ . Le problème suivant est alors obtenu dans le domaine fréquentiel :

$$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_c + \mu\mathbf{K}_f)\tilde{u} = 0 \quad (4.3)$$

Dans ce problème les opérateurs de rigidité de la structure  $\mathbf{K}_s$  et de rigidité des contacts  $\mathbf{K}_c$  sont symétriques tandis que le terme de frottement  $\mu\mathbf{K}_f$  est non symétrique.

### 4.3.1 Réduction de modèles

Le troisième temps est la projection des opérateurs sur une base de modes réels déterminés à partir du problème sans frottement dont les opérateurs de rigidité sont symétriques.

$$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_c)\psi = 0 \quad (4.4)$$

On obtient alors le problème réduit ci-dessous, dans lequel les opérateurs sont les projections des opérateurs du problème précédent sur la base constituée des premiers vecteurs propres de la base précédemment extraite. Le problème aux valeurs propres est alors résolu. Il permet d'obtenir des pôles complexes pour lesquels le rapport entre la partie réelle et la partie imaginaire indique l'amortissement négatif ou positif du mode (problème instable ou stable) et la partie imaginaire indique la fréquence.

$$(s^2 \mathbf{m} + \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_c + \mu \mathbf{k}_f) \tilde{u}_r = 0 \quad (4.5)$$

Cette projection n'est pas toujours très satisfaisante et peut demander un grand nombre de vecteurs de projection pour minimiser l'erreur liée à la réduction. Une alternative possible est d'effectuer un enrichissement de la base en utilisant la méthode présentée dans le chapitre viscoélasticité. Dans sa thèse, Franck Renaud a présenté l'impact de cette correction sur la qualité de l'analyse, voir figure 4.4. La correction apportée par l'enrichissement est extrêmement visible en ce qui concerne l'amortissement.

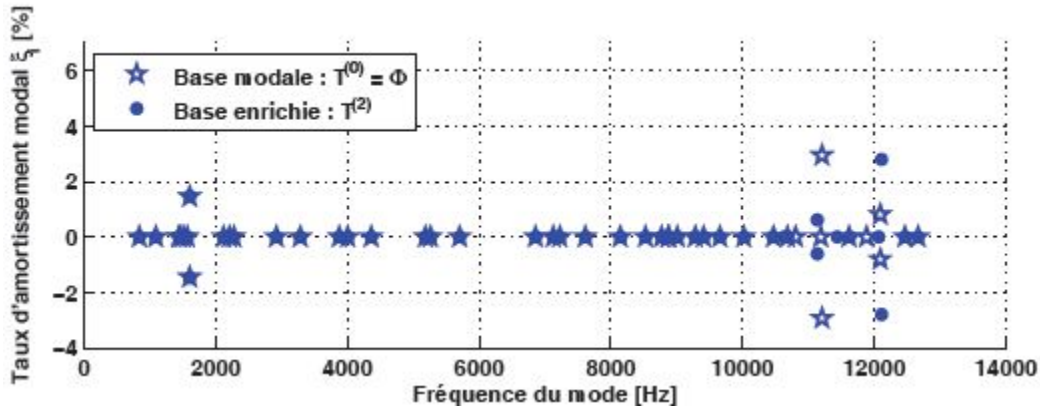


FIGURE 4.4 – Présentation d'un tracé d'un lieu des pôles complexes ("Root Locus") pour une analyse de stabilité.

### 4.3.2 Intégration de la viscoélasticité

Depuis quelques années des outils de simulation ont été développés au LISMMa par les étudiants et moi-même pour intégrer la prise en compte des comportements viscoélastiques dans les analyses de stabilité. Plusieurs équipes de recherche travaillent actuellement sur la prise en compte de l'amortissement dans les analyses de stabilité. Citons par exemple les travaux de G. Fritz<sup>4</sup> qui mettent en évidence le rôle de l'amortissement modal sur le crissement. L'auteur établit que, dans un diagramme de bifurcation, la coalescence de deux modes également amortis intervient pour un frottement plus fort par rapport à ce qu'elle aurait été si les modes n'avaient pas été amortis. En revanche, pour des modes inégalement amortis, l'auteur décrit un effet paradoxal : la coalescence intervient pour un frottement plus faible que pour des modes non-amortis, autrement dit l'amortissement aurait un rôle déstabilisateur, voir figure 4.5. L'utilisation de l'amortissement modal comme paramètre de l'étude a eu un rôle extrêmement pédagogique pour la compréhension du phénomène. Toutefois cet amortissement modal reste une vision globale du problème. Dans ces travaux, nous étions intéressés à donner des préconisations sur les dispositifs technologiques à mettre en oeuvre localement pour amortir les vibrations. Nous avons donc intégré les modèles décrits dans le chapitre précédent pour prendre en compte les matériaux viscoélastiques dans ces simulations. Les premiers travaux d'intégration de ces modèles ont été communiqués en 2006 lors du colloque Vibrations, Chocs et Bruits, [?]. Ces travaux portaient sur une plaquette modélisée en 2D et au dos de laquelle était collée une couche viscoélastique. Sur cet exemple, le rôle de l'amortissement était toujours stabilisant. Franck Renaud a ensuite communiqué sur un frein simplifié

4. Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal, JSV 2007

[? ]. Nous avons enfin communiqué sur des modèles de freins industriels, voir par exemple [? ], [? ] ou [? ]. Dans toutes ces études, la formulation de la viscoélasticité est basée sur le modèle de Maxwell Généralisé. La formulation du problème de stabilité est donc modifiée pour devenir la suivante :

$$(s^2 m + k_s + \sum_{k=1}^{n_{vp}} (\sum_{i=1}^{n_p} \frac{\alpha_{ik} \tau_i s}{1 + \tau_i s}) k_{\mathbf{v}\mathbf{k}} + k_{\mathbf{c}} + \mu k_{\mathbf{f}}) u_r = 0 \quad (4.6)$$

Pour obtenir les termes de cette équation, les opérateurs de rigidité, masse, et opérateurs de contact et frottement linéarisé sont projetés sur une base de modes propres du problème conservatif enrichie selon la méthode exposée dans le chapitre précédent. Etant donné les états internes du modèle, une formulation d'état utilisant l'hypothèse de pôles viscoélastiques communs est utilisée. Si vous n'avez pas lu le chapitre précédent, vous êtes normalement perdus !

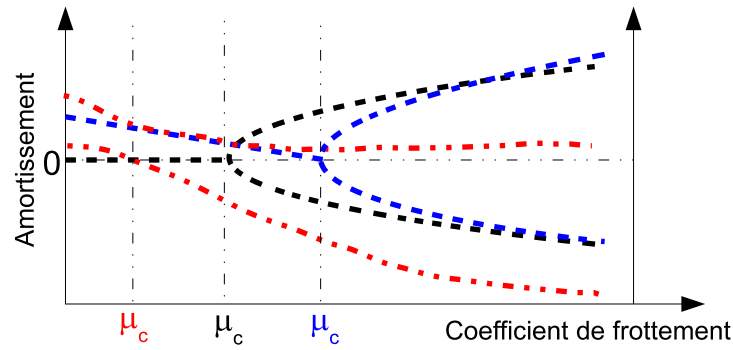


FIGURE 4.5 – Présentation d'un diagramme de bifurcation avec différentes configurations d'amortissement modal. Noir : pas d'amortissement. Bleu : amortissements identiques sur les deux modes. Rouge : amortissements différents sur les deux modes.

L'effet global de la prise en compte de la viscoélasticité est un déplacement des pôles dans le domaine stable, voir figure 4.6. Toutefois une étude sur un frein industriel publiée en 2009 [? ] a montré les effets particuliers qu'il est possible d'obtenir en ajoutant des composants viscoélastiques dans un système de freinage. Pour cela un grand nombre de pôles et les modes associés ont été étudiés. Pour chacun d'eux, des diagrammes de bifurcation ont été tracés en considérant un paramètre de réglage scalaire  $\Lambda$  pondérant l'ensemble de la fonction de relaxation. Ce paramètre varie entre 0 et 1 ; à zéro, il n'y a pas d'amortissement ; à 1, l'amortissement est maximum. Dans ces études, le coefficient de frottement est fixe.

$$(s^2 m + k_s + \sum_{k=1}^{n_{vp}} (\Lambda \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\alpha_{ik} \tau_i s}{1 + \tau_i s}) k_{\mathbf{v}\mathbf{k}} + k_{\mathbf{c}} + \mu k_{\mathbf{f}}) u_r = 0 \quad (4.7)$$

La figure 4.7 montre les trois effets caractéristiques qu'il est possible d'obtenir : Certains modes ne sont pas stabilisés parce que l'élément viscoélastique n'est pas sollicité ; d'autres sont instables au départ et encore plus instables lorsque l'amortissement est maximum ; enfin, sur le dernier diagramme, l'un des deux est instable lorsque l'amortissement est nul et il se stabilise lorsque l'amortissement augmente. Notons que, contrairement aux analyses sans amortissement, le point pour lequel la partie réelle traverse l'axe imaginaire ne correspond pas forcément à un couplage de fréquence. Ces résultats sont relativement conformes à ceux simulés par Fritz. Notons qu'outre l'amortissement, la rigidification du matériau peut également être responsable de découplage ou de couplage de modes. Nous avons établi la preuve qu'il est possible de prendre en compte la présence d'un composant viscoélastique. Ces outils doivent à présent être utilisés pour la conception des freins.

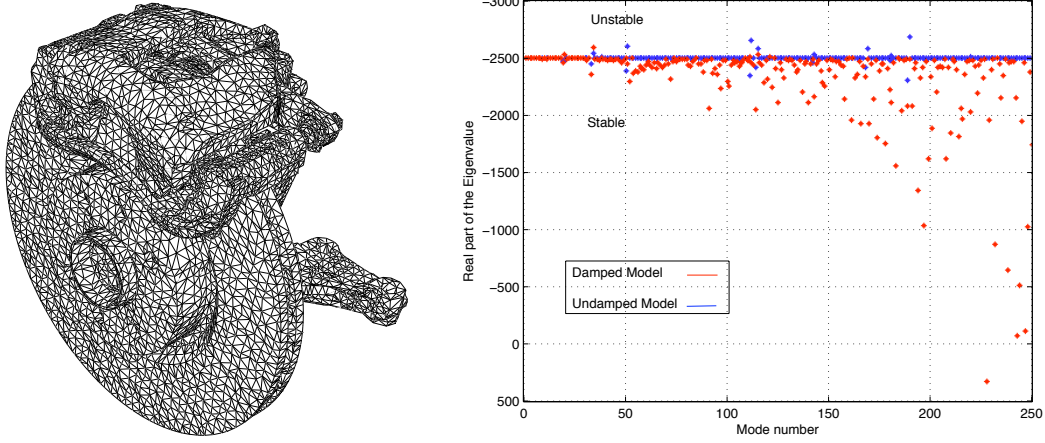


FIGURE 4.6 – Lieu des pôles complexes sur un frein complet à gauche avec et sans prise en compte de l’amortissement. En rouge, l’effet de l’amortissement est globalement stabilisateur, mais attention aux récalcitrants !

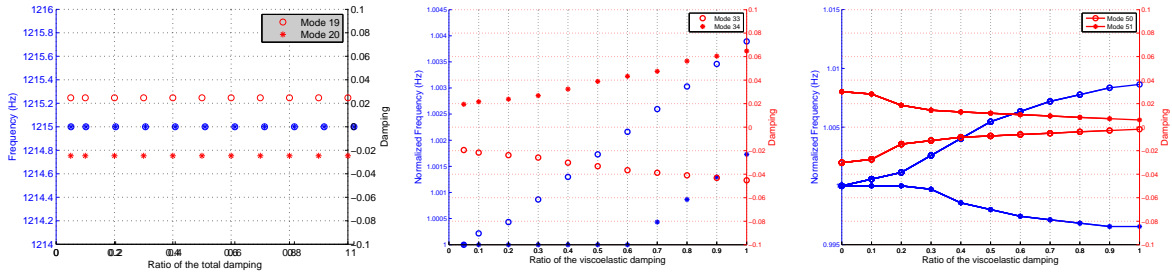


FIGURE 4.7 – Diagramme de bifurcation en fonction de  $\Lambda$ , ratio d’amortissement, variant entre 0 et 1. Présentation de résultats de trois natures différentes, de gauche à droite : mode non affecté par l’amortissement, mode destabilisé, mode stabilisé

## 4.4 Sollicitations subies par un élément viscoélastique

Les travaux les plus récents [?] qui ont été menés sur ce sujet au LISMMMA portent sur l’utilisation des outils de simulation que nous avons développé pour évaluer l’efficacité des dispositifs amortissant collés au dos des plaquettes par les manufacturiers pour éliminer le crissement. Dans cette étude, on se sert des outils numériques pour faire de la réalité augmentée. En effet, il est très difficile d’avoir accès aux modes de sollicitations d’un composant en régime vibratoire parce-qu’on s’intéresse à des grandeurs très locales pour lesquelles il n’existe pas de capteur adapté.

### 4.4.1 Description du modèle

Les manufacturiers collent des tôles multicouches appelées shims au dos des plaquettes. Ces tôles sont très efficaces lorsqu’elles sont utilisées pour remplacer des tôles métalliques homogènes. Dans cette configuration, lorsque la tôle subit des modes de flexion, les couches viscoélastiques subissent des contraintes de cisaillement et en se déformant, elles amortissent les vibrations. Pour qu’elles soient efficaces, il faut les couches d’éléments viscoélastiques soient contraintes (géométriquement par des couches rigides) à cisailier et que les modes des tôles soient globalement de la flexion. Au départ de cette étude, nous étions relativement sceptiques sur le mode de sollicitation réel que subissait ces tôles. Nous avons donc décidé de simuler la présence d’une tôle à

deux couches métalliques en peau et une couche viscoélastique à coeur, au dos de la plaquette. Les détails du modèle sont dans [? ]. Les paramètres du comportement du matériau viscoélastique sont issus de la campagne d'identification et de caractérisation des matériaux utilisés par Bosch Système de Freinage. Cette campagne a été effectuée Franck Renaud durant sa thèse grâce au viscoanalyseur piézoélectrique, voir chapitre précédent.

#### 4.4.2 Résultats globaux

Le même type d'analyse de bifurcation que dans la partie précédente a été produit. Le résultat est tracé dans un lieu des pôles, voir figure 4.8. La variation du paramètre  $\Lambda$  entraîne un déplacement des pôles dans le plan complexe. Plus  $\Lambda$  est grand, plus la trace du pôle est sombre ; plus  $\Lambda$  est faible, plus la trace est claire. On observe que la plupart des pôles se déplacent vers le demi plan Stable, surtout en basse fréquence. Toutefois la trajectoire de certains pôles est inversée, voir non-monotone lorsque plusieurs couplages successifs se produisent. Ceci semble confirmer que les shims jouent un rôle positif sur la plupart des modes.

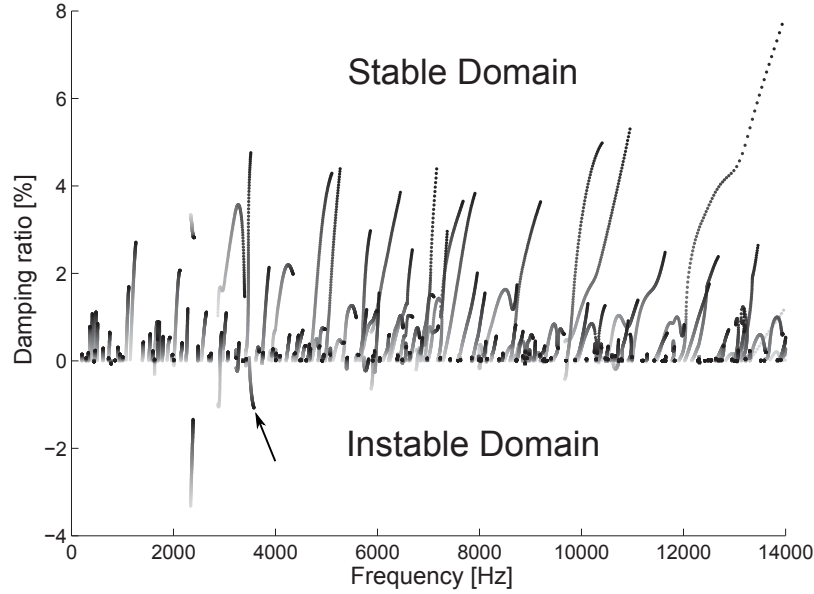


FIGURE 4.8 – Lieu des pôles complexes en fonction du ratio d'amortissement  $\Lambda$  appliqué au modèle.

#### 4.4.3 Post-traitement des énergies de déformation

Compte tenu du résultat global, il nous a semblé intéressant d'évaluer quel était le mode de sollicitation des shims sur chacun des modes. Pour cela nous avons post-traité l'énergie de déformation des modes en dissociant chacune des directions de sollicitation. Rappelons que l'énergie de déformation globale s'écrit :

$$W_e = \int_{\Omega} T : S dV = \int_{\Omega} T_{11} S_{11} dV + \int_{\Omega} T_{22} S_{22} dV + \dots + \int_{\Omega} T_{12} S_{12} dV \quad (4.8)$$

Chacune des énergies "directionnelles" a été post-traitée séparément sur la zone viscoélastique uniquement et pour chacun des modes, voir figure 4.9. Les énergies de cisaillement sont en couleur sombre. Le premier constat est que le shim n'est pratiquement pas sollicité en cisaillement, pour aucun des modes, voir article en annexe pour une vue générale de tous les modes. Le deuxième constat est que pour les modes 148 et 149, l'amortissement est stabilisateur mais le shim est sollicité en compression. Le troisième constat est que l'amortissement ne stabilise pas vraiment les modes 117 et 118 alors que le shim sur une des deux plaquettes est



sollicité en cisaillement. Sachant qu'en dehors de ce cas, le shim est principalement sollicité en compression, il faudrait le concevoir différemment pour dissiper encore plus d'énergie. Une couche contrainte n'est pas idéale en compression. Des butées viscoélastiques pourraient permettre une meilleure dissipation d'énergie. Ce constat est corrélé avec l'étude du mouvement de plaquette. Des tests devraient démarrer prochainement pour tester cette piste.

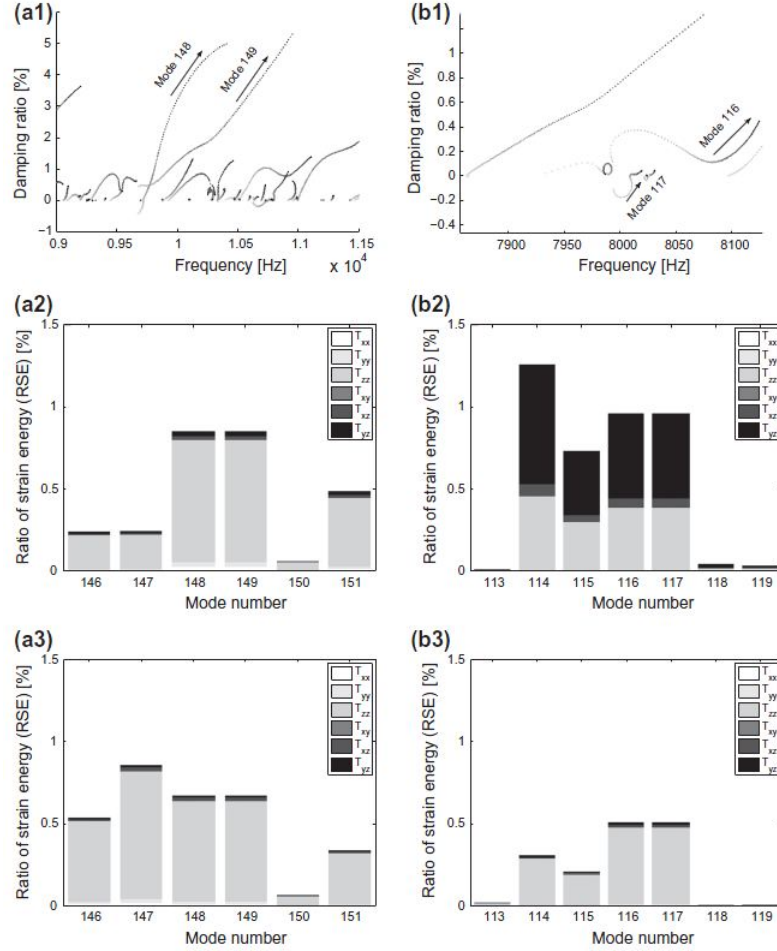


FIGURE 4.9 – En Haut : trajectoires des modes 116 (instable), 117, 148 et 149 (stables) dans le lieu des pôles. En bas : Ratio d'énergie de déformation dans toutes les directions pour les shims. a2 : plaquette intérieure, modes 148 et 149. a3 : plaquette extérieure, modes 148 et 149. b2 : plaquette intérieure, modes 116 et 117. b3 : plaquette extérieure, modes 116 et 117.

## 4.5 Conclusions et perspectives

Pendant plusieurs années, plusieurs étudiants se sont succédés dans le cadre d'un partenariat avec l'entreprise BOSCH pour travailler sur la mise au point d'un outil de simulation de la stabilité du glissement stationnaire. Parallèlement à cette démarche, des essais nous ont permis de remonter la cinématique d'une plaquette pendant le crissement. Les mouvements qui ont été mesurés et des simulations détaillées nous confortent dans l'idée que les solutions amortissantes déployées empiriquement ne sont pas optimales et que l'exploitation des outils de simulation développés pourrait permettre d'améliorer le choix des dispositifs

à mettre en oeuvre. C'est cet objectif technologique qui sera désormais poursuivi. D'autre part des essais complémentaires seront peut-être réalisés pour cette fois essayer de localiser et caractériser quelles sont les comportements non linéaires qui interviennent dans le crissement.

## Références du Chapitre

- [1] G. Chevallier, L. Levy, J.-L. Dion, R. Lemaire, and Pasquet T. Etude des dispositifs de contrôle passif du crissement de frein. Lyon, 2006. VCB.
- [2] G. Chevallier, S. Thouviot, F. Renaud, and J.-L. Dion. A numerical method to take into account the damping induced by viscoelastic materials in brake squeal. Venice (Italy), 2008. World Congress on Computational Mechanics.
- [3] G. Chevallier, F. Renaud, and J.-L. Dion. Viscoelastic damping effect on brake squeal noise. volume 2009. ASME IDETC, 2009.
- [4] F. Renaud, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Impact de la viscoélasticité sur les modes instables des systèmes de freinage. Marseille, France, 2009. Congrès Français de Mécanique.
- [5] S. Thouviot, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Dynamic computation of braking systems including viscoelastic behaviours. *Mécanique & Industries*, 10(5) :385–396, November 2009.
- [6] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Mouvement d'une plaquette lors d'un crissement de frein. Lyon, France, 2010. Colloque Vibrations, Chocs et Bruits.
- [7] H. Festjens, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study. *Applied Acoustics*, 73(11) :1121–1128, November 2012.
- [8] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion, and G. Taudière. Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, August 2012.

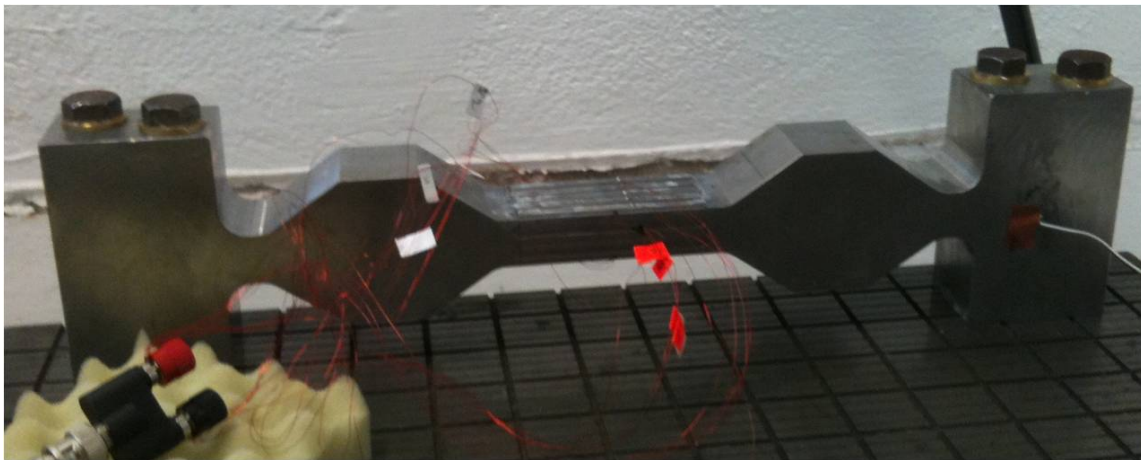




## Chapitre 5

# Amortissement des vibrations par frottement sec

*Nulle pierre ne peut être polie sans friction,  
nul homme ne peut parfaire son expérience sans épreuve.*  
Confucius, philosophe chinois, 551-479 av J.C.



### Résumé du Chapitre

Ce chapitre traite de l'amortissement par frottement dans les liaisons entre pièces mécaniques. Le chapitre est composé de deux parties. La première est une discussion sur les moyens d'essais favorisant l'observation et la caractérisation de l'amortissement généré par le frottement. La deuxième porte sur la détermination quasi-statique ou rhéologique de l'amortissement.

## 5.1 Introduction

Ces travaux s'intéressent à l'amortissement induit par les liaisons dans les assemblages. Cette dissipation d'énergie est produite par les mouvements vibratoires de faibles amplitudes qui créent des mouvements relatifs entre les pièces sur une partie des surfaces de contact. Autrement dit, les pièces ne se déplacent pas macroscopiquement l'une par rapport à l'autre, mais les déformations dans les zones de contact produisent un **glissement partiel**. Le travail des forces de frottement dans ce champ de glissement partiel induit une dissipation d'énergie. Académiquement, le sujet présente un grand intérêt à cause de sa multidisciplinarité. En effet, des compétences en tribologie et dynamique sont indispensables pour aborder le sujet. C'est pour cette raison que le projet MAIAS (Maitrise de L'Amortissement Induits par les ASsemblages) a été proposé par le LISMMMA, fort de ses équipes en tribologie et en dynamique, au pôle de compétitivité ASTECH. Les tribologues s'intéressent au sujet pour quantifier les effets pervers de cette dissipation : usure et fatigue regroupées sous le terme générique "fretting". Les dynamiciens essaient de trouver les conditions d'une dissipation d'énergie maximale.

D'un point de vue industriel, le sujet est également intéressant parce que le frottement est moins sensible à la température que le comportement des matériaux caoutchouc ou polymères. Dans les applications à fortes sollicitations thermiques, le frottement pourrait donc représenter une alternative. Certains dispositifs existent déjà, citons par exemple les frotteurs situés sur les aubes de turboréacteur, voir par exemple la thèse de Poudou<sup>1</sup> ou encore les travaux de Berthilier et al.<sup>2</sup>. Cependant, ces dispositifs utilisent un mécanisme de glissement total pour dissiper de l'énergie. D'autre part, les liaisons mécaniques sont présentes partout. La perspective de ces travaux serait donc de proposer de nouvelles prescriptions pour la conception de liaisons dont la seule fonction ne serait pas le maintien en position mais également la dissipation d'énergie. C'est la raison pour laquelle, plusieurs entreprises se sont jointes au projet pour aider au développement de composants adaptés à cette perspective.

Historiquement, ces travaux ont commencé avec la préparation de la thèse de Nicolas Peyret. Cette thèse, soutenue en 2012, était un travail d'observation et de compréhension des mécanismes de dissipation d'énergie. Lorsque le projet MAIAS a débuté, deux autres étudiants se sont joints à l'équipe sur ce sujet, Hugo Festjens et Julien Fortes Da Cruz, chargés de travailler sur des liaisons industrielles pour la caractérisation et la prédiction de l'amortissement mais aussi sur les revêtements anti-usure et sur le comportement à haute température.

## 5.2 Moyens d'essai et caractérisation

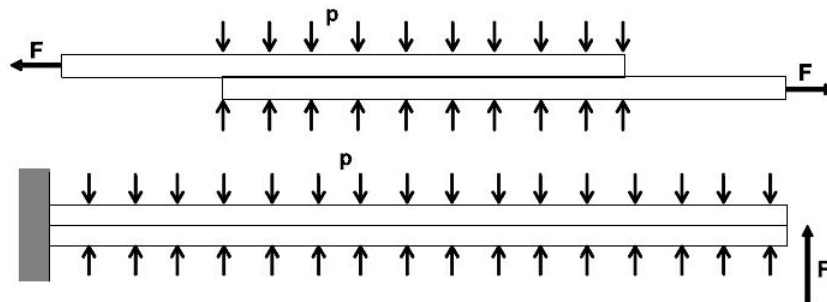


FIGURE 5.1 – Configurations étudiées par Goodman et al. en 1956 et Metherell, 1968, voir bibliographie de l'article [?] en annexe

1. Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction damped structural systems, University of Michigan, 2007
2. Blades forced response analysis with friction dampers, Trans. ASME 1998

La caractérisation de l'amortissement induit par une liaison mécanique est particulièrement difficile parce que :

- cet amortissement dépend de l'amplitude des sollicitations. Il faut donc mettre en oeuvre des moyens pour caractériser cette dépendance sans biais.
- l'amortissement prend des valeurs assez faibles aux faibles amplitudes. Les valeurs faibles sont toujours assez difficiles à caractériser, parce qu'elles sont souvent noyées dans le bruit de mesure, parce-que les sources externes d'amortissement sont prépondérantes, etc.
- la structure des bancs d'essai doit permettre au maximum d'éviter les couplages entre la pré-charge normale au contact et le chargement vibratoire engendrant du cisaillement dans la liaison.

Les tous premiers travaux sur le sujets étaient essentiellement analytiques, ils se donc focalisés sur la simplicité des configurations étudiées, voir figure 5.1. Dans ces configurations, **la charge normale est constante et la charge tangentielle est alternée**. D'autre part, la charge normale et la charge tangentielle sont sensées être uniformes du point de vue spatial. Cette configuration est la plus pratique du point de vue de la caractérisation. Malheureusement, elle n'est simple que sur le papier ! En effet il est extrêmement difficile, et même impossible, expérimentalement de garantir l'uniformité des pressions de contact et du champ de contraintes de cisaillement. Par ailleurs, sur ces moyens d'essai, les écarts de réalisation, les dissymétries engendrent des couplages dynamiques entre les forces normales et les forces tangentielles. Contrairement à ces montages, dans d'une liaison conventionnelle, la charge normale est appliquée par un élément de serrage comme un boulon, un rivet ou un point de soudure. Les vibrations, essentiellement en flexion, engendrent une charge tangentielle dynamique qui est équilibrée par le frottement entre les interfaces. Comme la pré-charge normale est en général importante, les variations de charge liées aux vibrations ne sont pas très perceptibles. Les travaux de recherche plus récents ont caractérisé des assemblages plus conventionnels comme des lames boulonnées avec différentes configurations géométriques, voir 5.2. La liaison (a) est la plus simple mais sa dissymétrie est susceptible de provoquer des couplages entre les contraintes normales et tangentielle, voir [? ]. Sur ce type de montage il existe notamment des ruptures et reprises de contact aux extrémités de chaque lame qui provoquent un comportement non-linéaire aux amplitudes de vibrations les plus fortes. Les liaisons dans lesquelles la pression de serrage est distribuée grâce à l'utilisation de plusieurs éléments de serrage, figure 5.2 (b, c, e, f), sont très intéressantes car elles permettent d'obtenir une surface de dissipation d'énergie importante et la symétrie autour de chaque boulon permet d'éviter les couplages. Le défaut de ces montages réside dans le fait qu'entre les boulons, des décollements et des chocs peuvent intervenir. Le montage c est très intéressant car il évite ces décollements tout en étant très symétrique. les montages (g) et (h) favorisent énormément la dissipation en sollicitant la liaison autour de l'axe de rotation de son élément de serrage. Mais il s'agit d'un usage qui favorise également le déserrage de la liaison.

### 5.2.1 Montage académique

Dans ses travaux de thèse, Nicolas Peyret a imaginé un montage académique, voir [? ] et [? ], constitué d'une poutre dont les rotations aux extrémités sont fixées et qui est pré-chargée axialement, voir figure 5.2 (j) . Le premier mode de flexion de se montage est celui d'une poutre bi-encastée. Lorsque la poutre vibre sur ce mode, le moment de flexion s'annule dans les sections situées aux abscisses  $x = L/4$  et  $x = 3L/4$ , voir figure 5.3. Ce point est très intéressant parce qu'il garantit que les contraintes normales induites par la pré-charge axiale ne seront pas modulées par les contraintes normales induites par la flexion. En ces deux points particuliers, il n'existe donc pas de couplage entre les directions normales et tangentielles. De plus, l'effort tranchant est directement proportionnel à l'amplitude du mode de flexion. Les contraintes de cisaillement dans cette section sont donc complètement liées aux vibrations de la poutre, voir figure 5.3. Le montage imaginé initialement [? ] et [? ] a évolué vers un montage respectant les même principes mais pour lequel la section n'est pas constante le long de la poutre [? ]. Cette forme a été dessinée pour pouvoir augmenter l'aire des surfaces de frottement et aussi pour que la zone dans laquelle le moment de flexion est nul soit plus large, voir figure 5.4. Cette précaution limite l'impact des éventuelles erreurs de fabrication. La géométrie finale est celle de la photo située sur la page de garde de ce chapitre. Finalement, ce montage garantit une bonne indépendance entre les chargements normaux et tangentiels; cette indépendance a pu être vérifiée expérimentalement grâce à des mesures de déformation par jauges située sur le repère 2 de la figure 5.5.

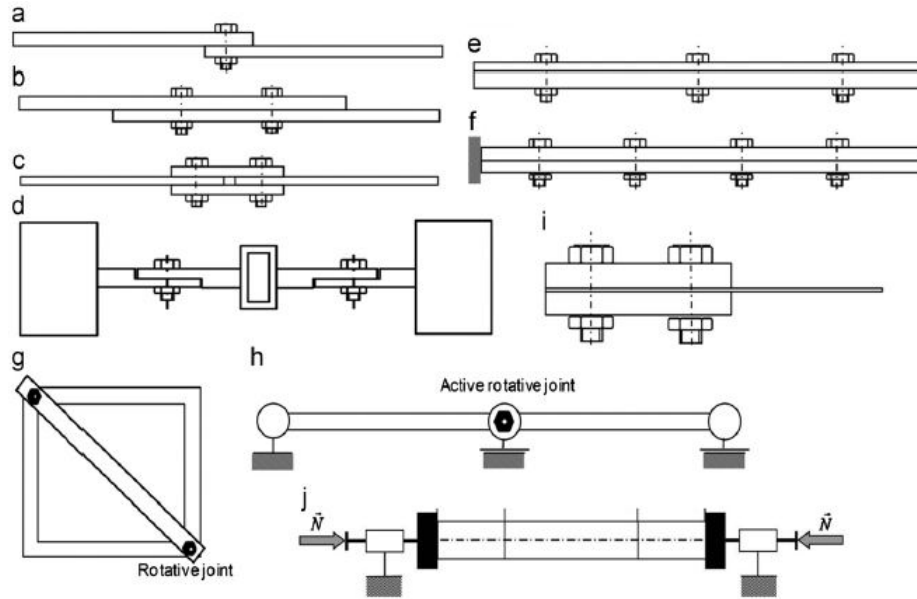
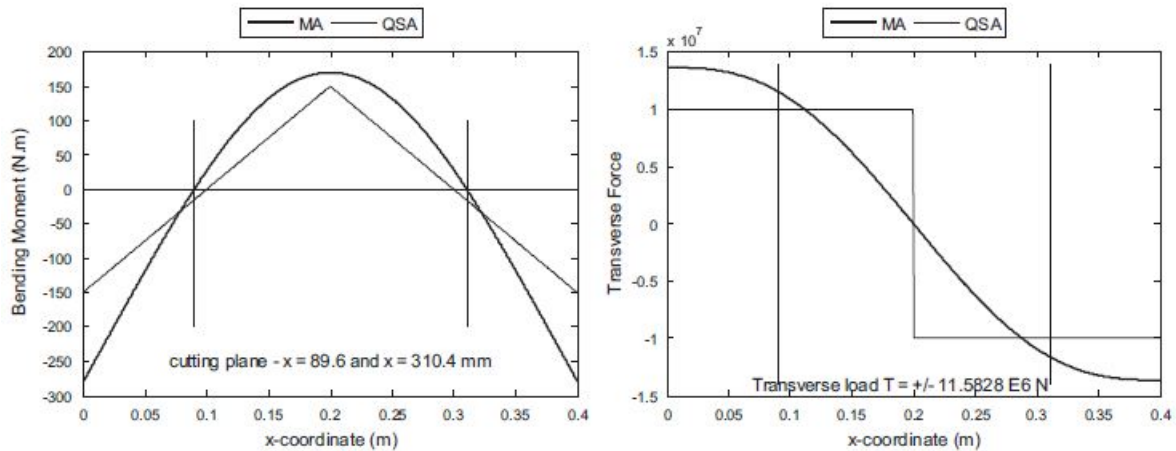


FIGURE 5.2 – Exemples de bancs de test développés pour caractériser l’amortissement par frottement.


 FIGURE 5.3 – A gauche : moment de flexion calculé à partir du premier mode de flexion (MA) et de la déformée statique (QSA). Dans les deux cas, le moment s’annule autour des abscisses situées à  $L/4$  et  $3L/4$ . A droite : effort tranchant calculé à partir du premier mode de flexion (MA) et de la déformée statique (QSA).

## 5.2.2 Montage technologique

Dans ses travaux de thèse, Hugo Festjens a travaillé sur des montages boulonnés. L’éprouvette de test est une poutre encastree libre constituée de deux éléments assemblés par boulonnage, voir photos 5.6. Une instrumentation particulière a été déployée : les boulons sont instrumentés avec un capteur de force annulaire pour acquérir la force de serrage ; lorsque l’excitation est effectuée au pot vibrant, un capteur piézoélectrique mesure la force d’excitation ; deux accéléromètres permettent de mesurer la cinématique. Dans ce montage, la force de serrage est moins indépendante des vibrations, surtout lorsqu’il n’y a qu’un seul boulon et que la force de serrage est faible. La deuxième génération dispose de deux boulons, ce qui améliore considérablement

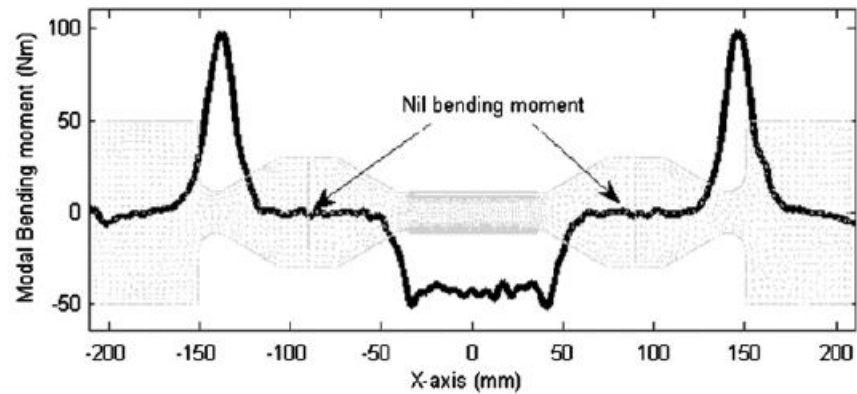


FIGURE 5.4 – Montage académique. Moment de flexion calculé pour le premier mode de vibration de flexion. Géométrie optimisée en arrière plan.

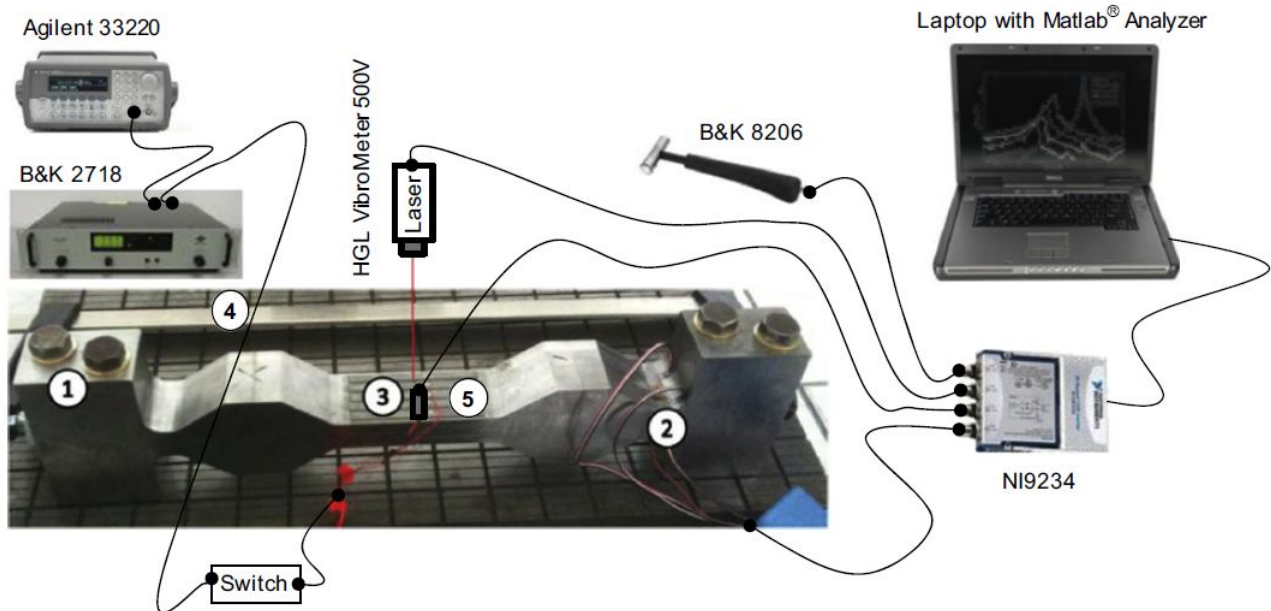


FIGURE 5.5 – Vue globale du montage d'essai. Nomenclature : 1-boulons d'encastrement, 2-jauges de mesure de la flexion et de la pré-charge, 3-vélocimétrie laser, 4-serre joint de mise en charge, 5-exciteurs piézoélectriques.

l'indépendance entre le serrage et les vibrations même pour les forces de serrage faibles. Pour les serrages les plus faibles, les boulons ont tendance à se dévisser, la société JPB Systèmes a donc développé un boulon spécial utilisant un système de cliquets pour garantir le serrage, photo de droite 5.6.

### 5.2.3 Dynamique de l'essai

Pour une caractérisation de rhéologie linéaire, l'excitation que l'on applique à l'éprouvette n'a pas une grande importance. En effet, l'objectif est de construire une fonction de transfert entre la cinématique observée et la force appliquée. De plus les modes propres étant orthogonaux, les comportements à la résonance

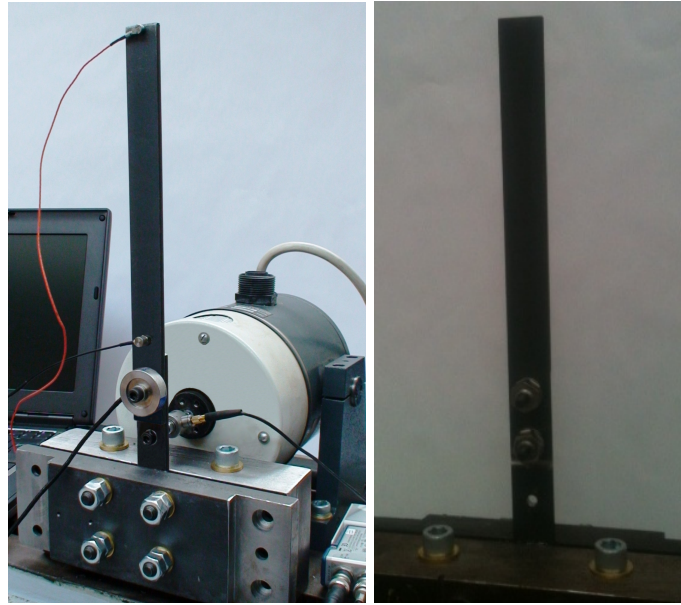


FIGURE 5.6 – Montages pour la caractérisation des liaisons boulonnées. Gauche : assemblage avec 1 boulon instrumenté d'un capteur de force de serrage. Excitation au pot vibrant avec capteur de force piézoélectrique. Instrumentation cinématique avec deux accéléromètres. Droite : éprouvette avec deux boulons indévissables même à faible pré-charge développés par la société JPB Systèmes pendant le projet MAIAS.

sont faciles à déterminer. Lorsque les rhéologies sont non-linéaires, il est raisonnable d'essayer d'appliquer des excitations purement harmoniques à différents niveaux d'amplitude pour cartographier au mieux la dépendance de l'amortissement à la fréquence et à l'amplitude des sollicitations. Toutefois, ces campagnes d'essais sont très longues. Dans ces travaux, modestement, nous nous sommes intéressés à déterminer l'amortissement non-linéaire d'un seul mode à la fois. Les couplages ne sont pas traités pour l'instant. Ce qui limite le nombre de fréquences à tester à une bande étroite autour de la fréquence du mode. Nous avons mis en concurrence plusieurs techniques d'excitation : choc, échelon, excitation harmonique balayée, excitation harmonique interrompue. L'échelon est difficile à mettre en oeuvre et nous n'aborderons pas davantage son utilisation. L'excitation harmonique balayée est d'une mise en oeuvre fastidieuse et nécessite des campagnes d'essais longues. Les chocs excitent une large bande de fréquence et sont peu souhaitables si la densité modale est importante. Toutefois si le choc est "mou", sa fréquence de coupure peut-être suffisamment basse pour n'exciter qu'un seul mode. Il est possible d'accentuer encore cet effet en tapant sur un noeud du second mode. Hugo Festjens combine ces deux points pour effectuer une excitation au choc sur son éprouvette. Il obtient ainsi un signal de déplacement quasiment mono-fréquentiel, proche du régime libre d'un système à un degré de liberté. Le signal obtenu est ensuite analysé pour identifier par décrétement logarithmique l'amortissement instantané. Le choc présente en outre l'avantage de donner des niveaux vibratoires élevés, ce qui permet de caractériser l'amortissement sur une large plage d'amplitudes. L'excitation harmonique interrompue consiste à exciter la structure à sa fréquence de résonance puis lorsqu'un fort niveau vibratoire est atteint, la source d'excitation est éteinte. Cette technique permet d'obtenir exactement le régime libre d'un mode. Le signal obtenu est beaucoup plus pur que celui que l'on obtient à partir d'un choc. Toutefois, la méthode nécessite que l'impédance du moyen d'essai ne change pas lorsque l'excitateur est déconnecté. Elle est donc difficile à mettre en oeuvre avec un pot vibrant. L'essai académique utilise comme excitateurs des patches piézo-électriques collés sur la structure, figure 5.5. Grâce à leur faible taille, ils ne modifient pratiquement pas le comportement de la structure. Malgré le faible couplage électromécanique, avec l'aide de l'inertie de la structure, ils permettent d'exciter le mode de vibration à un niveau correct. La mise en oeuvre de cette excitation est plus contraignante que l'excitation au choc mais les résultats obtenus sont bien meilleurs et ne nécessitent

pas d'opérations de filtrage avant l'identification. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [?] .

### 5.2.4 Résultats d'essais

Les essais sur la structure académique ont été obtenus en appliquant une excitation harmonique interrompue. L'enveloppe des signaux a ensuite été analysée pour déterminer l'évolution de l'amortissement en fonction de l'amplitude. Pour déterminer l'amortissement ne provenant pas des interfaces, une structure monolithique (sans liaison) a également été analysée. Les résultats montrent que les faibles pré-charges permettent d'obtenir plus d'amortissement. La poutre monolithique a un amortissement deux à trois fois plus faible que celui de la poutre assemblée. Les niveaux vibratoires obtenus atteignent  $1.5\mu m$ . Le facteur de perte de la structure assemblée se situe entre 0.7% et 1.3% et il dépend de l'amplitude vibratoire, voir figure 5.7.

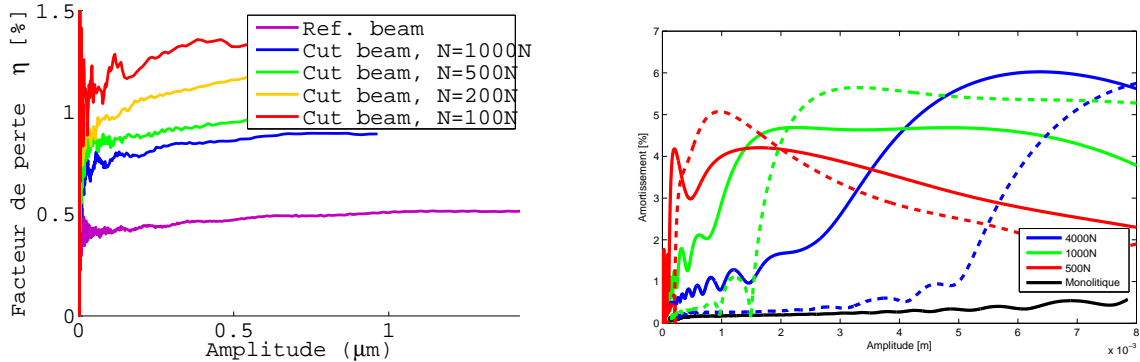


FIGURE 5.7 – Gauche : Résultats de l'essai de caractérisation de l'amortissement sur le montage académique. Droite : Résultats de l'essai de caractérisation de l'amortissement sur le montage technologique. Comparaison entre différentes pré-charges et une structure de référence monolithique

Sur la structure boulonnée, les résultats ont été obtenus grâce à une excitation au choc. Après filtrage et identification sur les signaux bruts, on obtient un comportement assez complexe. L'amortissement est très faible aux basses amplitudes de sollicitation puis il augmente jusqu'à une valeur maximale puis décroît pour les amplitudes plus élevées. Le maximum d'amortissement est atteint pour une valeur d'amplitude de sollicitation qui dépend de la pré-charge. Ainsi, plus la pré-charge est élevée, plus ce maximum d'amortissement est décalé vers les amplitudes élevées. Ce résultat se retrouve numériquement également, voir figure 5.9.

## 5.3 Simulation quasi statique

Dans cette partie, nous évaluons la possibilité de déterminer l'amortissement d'un mode à partir de simulations quasi-statiques. Le modèle réduit à un degré de liberté est gouverné par l'équation suivante :

$$m\ddot{u} + ku + f_{cf}(u, \dot{u}) = f(t) \quad (5.1)$$

Dans laquelle,  $f_{cf}(u, \dot{u})$  désigne les forces de contact et frottement. Nous avons montré dans le chapitre 1 qu'il était possible de déterminer un facteur de perte  $\eta$  équivalent dépendant de l'amplitude vibratoire, utilisable pour résoudre des problèmes en régime permanent dont l'excitation est harmonique avec l'écriture suivante :

$$-\omega^2 mu + k[1 + i\eta(|u|)]u = f(\omega) \quad (5.2)$$

L'objectif est de déterminer une fonction mathématique qui lie l'énergie dissipée à l'amplitude des sollicitations à partir d'un problème de mécanique des milieux continus avec contact et frottement. A partir de



l'énergie dissipée, il est possible de déterminer le facteur de perte ou la force de dissipation  $f_{cf}$ . Dans les travaux de N. Peyret, ce problème est résolu analytiquement moyennant quelques hypothèses. Dans les travaux de H. Festjens, le problème est construit par éléments finis et est gouverné par les équations suivantes :

$$M\ddot{U} + KU + F_{cf}(U, \dot{U}) = F_e \quad (5.3)$$

Les opérateurs sont calculés par la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul ABAQUS.

### 5.3.1 Définition de l'énergie dissipée

Le facteur de perte est évalué à partir du calcul quasi statique de l'énergie dissipée dans les interfaces. Cette approche trouve sa justification dans le fait que la forme des modes propres n'est pas fondamentalement modifiée par la force de dissipation étant donné les faibles valeurs qu'elle prend comparées aux forces de rappel élastique et d'inertie. Cette approche a ensuite été améliorée et appliquée à travers une simulation numérique par Hugo Festjens, [? ]. Dans les deux cas, la démarche utilise l'hypothèse de Masing, voir chapitre 1. Du coup, l'énergie dissipée s'écrit :

$$W_d(u) = \oint f_{cf} du = 4 \int_0^u f_{cf}(v) dv \quad (5.4)$$

Dans cette expression, la force de dissipation  $f_{cf}$  est une force globale, de même que le champ de déplacement  $u$ . Ces deux variables sont pratiquement impossible à déterminer *ex nihilo*. Nous changeons donc d'échelle pour passer à celles des champs des contraintes et des déformations dans l'interface :

$$W_d(u) = 4 \int_{S(u)} \int_0^{\epsilon(u)} \tau d\epsilon = 4 \int_{S(u)} \int_0^{\epsilon(u)} \mu \sigma_n d\epsilon \quad (5.5)$$

Dans cette équation,  $\tau$  et  $\epsilon$  désignent l'état de contrainte de cisaillement et les déformations liées à l'amplitude vibratoire  $u$ ,  $S(u)$  est la surface sur laquelle il y a glissement.

La démarche de simulation démarre par un calcul des déformations et contraintes dans les liaisons sous l'action de la force de serrage. Ensuite Les forces de contact sont linéarisées pour calculer un mode normal  $\phi$  de la structure dans cet état de pré-charge. Une fois que la forme du mode est connue, on se sert du mode comme chargement sur la structure.

Dans l'article [? ], les états de contraintes et déformations, ainsi que la surface de glissement sont déterminés analytiquement ou presque, grâce à des hypothèses simplificatrices. Dans [? ], ils sont déterminés numériquement. Les détails sont disponibles dans les articles [? ] et [? ] en annexe. Les travaux de Hugo Festjens améliorent le processus en introduisant une réduction du modèle à la zone de contact, voir figure 5.8 qui passe par la décomposition du champ de déplacement :

$$\begin{aligned} M_{aa}\ddot{U}_a + M_{ab}\ddot{U}_b + K_{aa}U_a + K_{ab}U_b + F_{cf}(U_a) &= 0 \\ M_{bb}\ddot{U}_b + M_{ba}\ddot{U}_a + K_{bb}U_b + K_{ba}U_a &= F_e \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ensuite les conditions aux limites du modèle réstreint à la liaison tiennent compte des forces d'inerties liées à la dynamique de la partie de la structure qui n'est pas simulée :

$$K_{aa}U_a + F_{cf}(U_a) = (\omega^2 K_{aa}\phi_a - K_{ab}\phi_b) q \quad (5.7)$$

Cette approche a été confrontée récemment à une simulation dynamique transitoire qui reproduit un essai avec excitation harmonique interrompue, voir figure 5.9, résolution de l'équation 5.6 . L'accord entre les deux approches est très bon. Le résultat obtenu est très caractéristique de la dissipation d'énergie par glissement partiel. Aux faible amplitudes, la dissipation est pratiquement nulle. Elle est même complètement nulle dans les travaux publiés par Nicolas Peyret, [? ], [? ] ou [? ]. Au delà d'une amplitude de déplacement ou d'énergie vibratoire, la courbe croit rapidement.

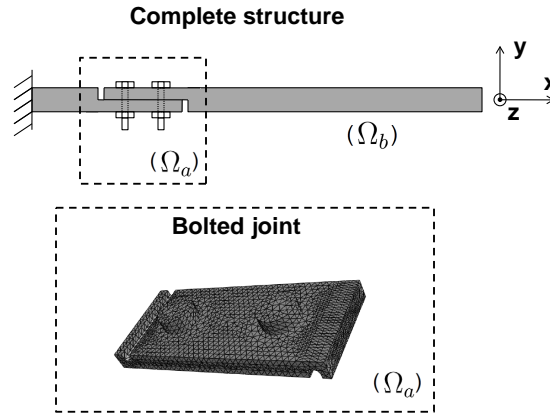


FIGURE 5.8 – Réduction du modèle à la zone de contact. Les conditions aux limites sont appliquées sur la surface qui séparent les deux domaines

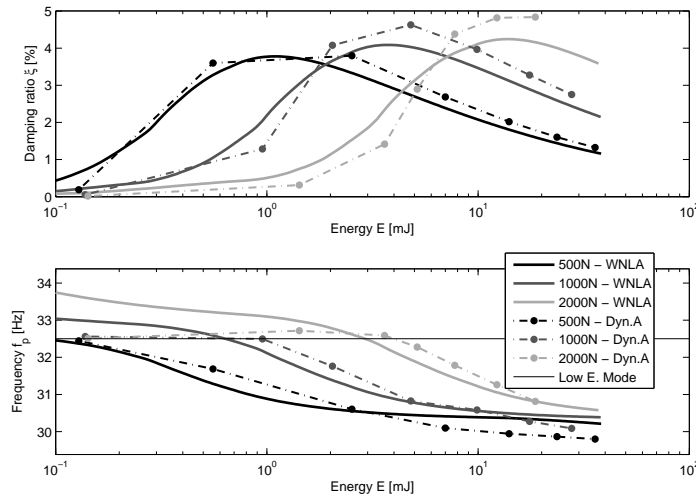


FIGURE 5.9 – Comparaison des résultats obtenus par une approche quasi-statique sur un modèle réduit WNLA et par une approche transitoire sur un modèle complet Dyn.A. En abscisse, l'énergie vibratoire à amplitude maximum. En ordonnée, l'évolution de la fréquence naturelle et de l'amortissement.

### 5.3.2 Utilisation des résultats dans les simulations dynamiques

Les résultats précédents peuvent être utilisés dans des simulations dynamiques, voir équation 5.1, soit grâce à un facteur de perte dépendant de l'amplitude, soit grâce à une force de dissipation dérivée de l'énergie dissipée par rapport au déplacement modal. A partir de l'énergie dissipée, on détermine le facteur de perte grâce à l'équation suivante :

$$\eta(u) = \frac{W_d(u)}{2\pi W_e(u)} \quad (5.8)$$

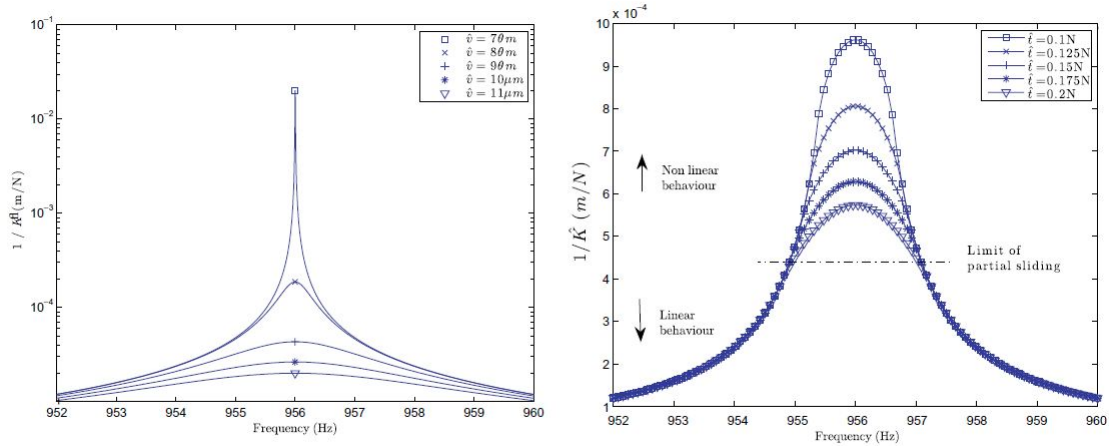


FIGURE 5.10 – Réponses dynamiques obtenues grâce aux équations 5.9 et 5.9. Gauche : déplacements  $v$  imposés. Droite : forces  $t$  imposées. Les courbes sont tracées pour différents niveaux d'excitation.

Deux type de problèmes peuvent alors être résolus. Le problème à force imposée  $f_0$  qui consiste à trouver  $u$  tel que :

$$-\omega^2 mu + k [1 + i\eta(|u|)] u = f_0(\omega) \quad (5.9)$$

Ce problème est algébrique non-linéaire. Il est résolu numériquement par une méthode d'optimisation quelconque. Il permet de tracer le faisceau de "fonctions de transfert" de la figure 5.10. Le problème à déplacement  $u_0$  imposé consiste à trouver  $f$  tel que :

$$-\omega^2 mu_0 + k [1 + i\eta(|u_0|)] u_0 = f(\omega) \quad (5.10)$$

Ce problème est direct. Il suffit d'imposer la valeur de  $u_0$  pour connaître la valeur de la réaction  $f$ . Les résultats font apparaître que pour les basses amplitudes, le comportement est linéaire, fonctions de transfert superposées, et non-amorti. Ensuite, plus l'excitation a une grande amplitude, moins l'amplitude de la fonction de transfert est grande! c'est finalement logique puisque l'amortissement est d'autant plus important que l'amplitude de l'excitation est grande. Des simulations dans le domaine temporel ont également été effectuées. Pour cela, il faut déterminer la forme de la force de dissipation à partir de la définition thermodynamique du chapitre 1.

$$f_{cf}(u, \dot{u}) = \frac{dW_d}{du} \quad (5.11)$$

Dans le cas de l'exemple académique, l'énergie dissipée est représentée sur la figure 5.11. Etant donné que dans cet exemple, il n'y a pas de dissipation pour les faibles amplitudes, la force de dissipation est nulle aussi. Ensuite, une fois le seuil de dissipation atteint, la force décrit une boucle d'hystérésis. Des simulations temporelles ont été effectuées avec ce modèle en régime libre, voir 5.12. Le résultat fait apparaître que la dissipation ainsi calculée produit des résultats très similaires à ce que l'approche énergétique a pu produire. Un fait remarquable étant notamment que ce type de modèle produit un changement de fréquence naturelle au cours de l'oscillation, lors des transitions entre adhérence totale et glissement partiel, liées à la perte de raideur, assez similaire à ce que produit un shunt de type switch en piézoélectricité.

## 5.4 Conclusions et perspectives

Des caps importants ont été franchis du point de vue de la compréhension des phénomènes physiques et des méthodes permettant de les caractériser. Du point de vue de la simulation, des outils ont été développés qui permettent de déterminer la rhéologie d'une liaison. Il existe parfois des écarts entre les résultats de

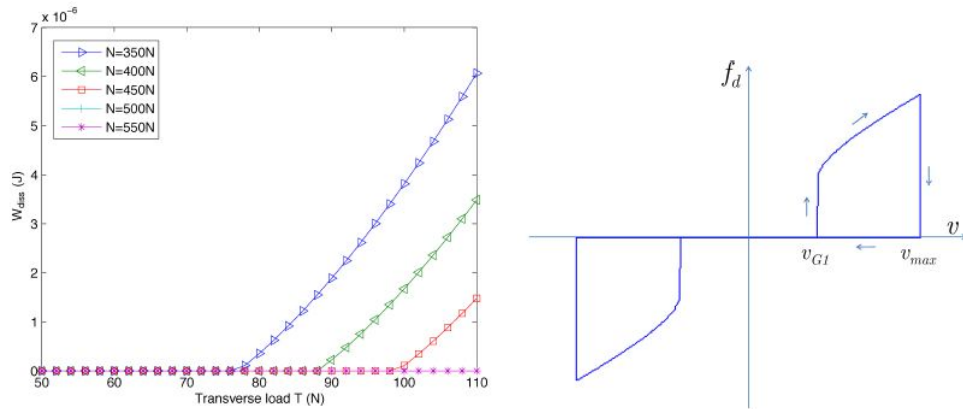


FIGURE 5.11 – Représentation de l'énergie dissipée et de la force de dissipation en fonction de l'effort tranchant et de l'amplitude cinématique dans l'exemple académique

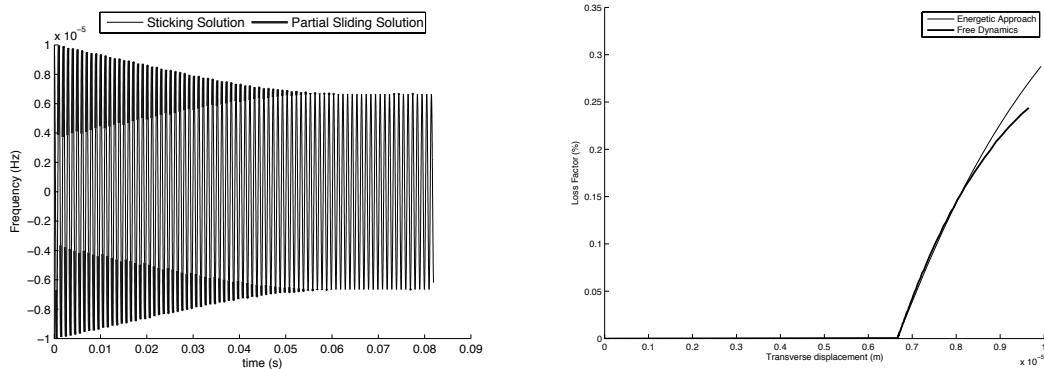


FIGURE 5.12 – Régime libre de l'oscillateur 1ddl avec fonction de dissipation non linéaire. Post traitement de l'amortissement et comparaison avec l'approche énergétique

mesures et les résultats obtenus par modélisation, c'est particulièrement vrai dans les travaux publiés par N. Peyret. En effet, les simulations qu'il a effectuées considèrent que les surfaces sont parfaitement planes. Cette hypothèse n'était pas absurde dans la mesure où une attention particulière a été portée à la réalisation de ces surfaces qui ont été découpées par un procédé d'électroérosion. Une mesure de l'état de ces surfaces montre cependant qu'il existe des imperfections. Nous proposons, à partir des mesures de surface, de prendre en compte les défauts géométriques dans les simulations. Cette approche est décrite dans le dernier chapitre de la thèse de Nicolas Peyret et est en phase de généralisation dans les travaux de H. Festjens. Notons que pour les structures dont les surfaces sont plus conformables, c'est à dire moins rigides, le problème est moins sensible.

D'un point de vue académique, il reste des difficultés pour déterminer ce qu'il se passe lorsque plusieurs modes sont excités simultanément. Des exemples simples permettent de montrer que lorsque deux modes sont excités simultanément, leur amortissement est plus important que lorsqu'ils sont excités séparément à la même amplitude. Des pistes sont à l'étude pour prendre en compte cet effet dans nos simulations.

D'un point de vue technologique, une réflexion est menée pour proposer des liaisons à fort potentiel de dissipation, en jouant sur les revêtements, la géométrie, la position des éléments de serrage. La conception d'éléments de serrage supportant de n'être que faiblement serrés sans se dévisser a abouti à un prototype pour lequel un brevet est en cours.

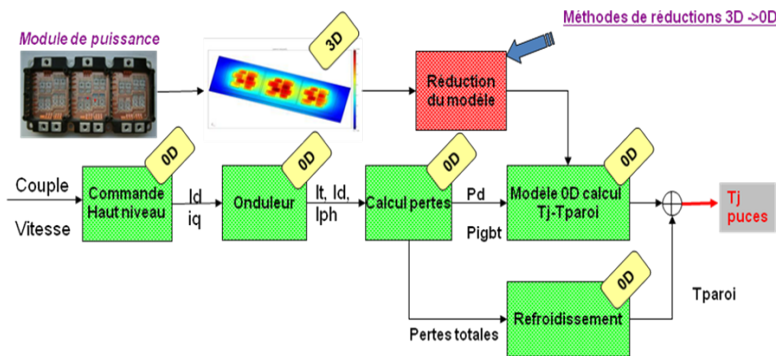
## Références du Chapitre

- [1] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Non linear dynamic behaviour modelling of a planar friction interface in a structure assembly. San Diego, USA. ASME IDETC.
- [2] N. Peyret, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Analysis of the non linear dynamic behaviour of an assembly. Determination of the friction-induced damping. Venice (Italy), 2008. World Congress on Computational Mechanics.
- [3] N. Peyret, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Energy dissipation in an assembly with planar contact. Lyon, France, 2010. Colloque Vibrations, Chocs et Bruit.
- [4] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Micro-slip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02 :281, 2010.
- [5] J.-L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 00 :000, 2012.
- [6] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-L. Dion. A numerical quasi-static method for the identification of frictional dissipation in bolted joints. Chicago, USA, 2012. ASME IDETC.

## Chapitre 6

# Conclusion Générale

*C'est une question de propreté, il faut changer d'avis comme de chemise.*  
Jules Renard, vaudevilliste (1813-1877).



Ce dernier chapitre est surtout un exposé de perspectives, puisque des conclusions partielles ont été données à l'issue de chaque chapitre. Les vibrations sont elles un sujet inépuisables? Après sept ans de travaux, il y a encore beaucoup de questions! Ce mémoire et ses annexes proposent des réponses quant à la caractérisation de l'amortissement, à son identification et à l'utilisation de modèles dans les simulations. A cet instant, les sujets qui restent très ouverts sont liés aux comportements non-linéaires.

D'un point de vue phénoménologique, Le crissement de frein et l'amortissement par frottement, restent des sujets pour lesquels la communauté manque d'observations. Les conséquences des non-linéarités locales sur le comportement global sont difficiles à établir. D'autant que la mesure est difficile. Tout le monde s'accorde à dire que les instabilités sont limitées en amplitude grâce à la présence de non-linéarités. Nous montrons dans nos travaux expérimentaux que l'instabilité est directement liée à la pression hydraulique de freinage. Il existe donc une pré-charge favorisant l'établissement du crissement. L'identification de la non-linéarité qui régit les cycles limites ou encore la pré-charge reste un sujet assez ouvert.

Les comportements piézoélectriques deviennent non-linéaires en actionnement lorsque les champ électriques appliqués deviennent importants; Il peuvent même être hystérétiques dans un plan qui lie le potentiel électrique à la déformation mécanique. Lorsque ces matériaux sont utilisés dans les conditions dans lesquelles ils se comportent non-linéairement, les définitions qui ont été posées ne sont plus pertinentes. Il faut repenser la façon de caractériser le couplage électromécanique qui devient certainement dépendant de l'amplitude des sollicitations. De même, en contrôle actif, les circuits doivent pouvoir être adaptatifs pour tenir compte des non-linéarités.

L'hyperélasticité des polymères joue un rôle important sur l'énergie qu'il peuvent dissiper. Cet effet a été caractérisé à travers la dépendance à la pré-charge qui a été mise en évidence grâce au viscoanalyseur. Toutefois la prise en compte de ces effets non-linéaires remet profondément en cause les modèles présentés dans ce mémoire pour la simulation numérique.

Les comportements non-linéaires remettent en cause une bonne partie des outils mathématiques ou informatiques liés à la résolution ou à l'identification. Le point qui semble particulièrement stratégique porte sur la réduction des modèles en présence de non-linéarités. Les méthodes de réduction de modèles sont indispensables, tant pour réduire les coûts de simulation que pour permettre les changements d'échelle. Dans ce mémoire, quasiment tous les chapitres abordent le sujet de la réduction de modèles tant c'est un sujet capital. La page de garde de ce chapitre présente le modèle dynamique d'une électronique de commande pour un véhicule électrique, travaux de thèse en cours de Frédéric Da Silva [? ]. Dans ce modèle, derrière les pavés se cachent des modèles réduits issus de simulations détaillées basées sur des équations aux dérivées partielles et une description fine de la géométrie. Réduire des modèles dont le comportement est non linéaire est un challenge. Nous proposons quelques pistes dans le chapitre sur l'amortissement par frottement, pour des non linéarités localisées. Actuellement, nous travaillons sur la réduction de modèles pour des comportements thermiques et électromagnétiques affectés de non-linéarités diffuses (matériaux dont le comportement dépend de la température, rayonnement).

La convergence des différents sujets est également une tentation très forte. Ainsi, nous envisageons de produire de l'amortissement par frottement avec un contrôle de la charge normale par un élément piézoélectrique. Ceci nous donnera la possibilité d'élargir la plage d'amplitude d'utilisation de ces liaisons. Des travaux effectué par L. Gaul dans ce sens semblent très prometteurs. Nous imaginons également un shunt amortissant pour éléments piézoélectriques qui fonctionne sur une large bande de fréquence comme le ferait un matériau visco-élastique. Deux challenges subsistent pour atteindre ce but, placer de manière optimale les patchs pour maximiser le couplage sur plusieurs modes et déterminer le choix des composants électriques à associer à ce montage.

Enfin, nous n'avons jamais perdu de vue l'objectif de fournir des préconisations et des méthodes pour assister les ingénieurs dans la conception de leurs produits. Critiquer les choix technologiques pour amortir le crissement de frein a déjà fait l'objet d'une publication. Nous espérons poursuivre en proposant cette fois une alternative technologique aux sandwichs multicouches collés au dos des plaquettes en suivant les conclusions de l'article publié en 2012. Sur l'amortissement par friction, une réflexion sur la conception de liaisons dont la vocation est de dissiper est en cours. Cette réflexion a donné lieu à la réalisation d'un prototype d'érou. Des réflexions sur la forme des interfaces de contact sont également en cours.

D'un point de vue personnel, sept ans de travaux sur la problématique de l'amortissement m'ont ouvert à

---

toutes les disciplines qui gravitent autour de ce sujet, depuis les essais jusqu'à la simulation, sur les différentes physiques qui interviennent dans le domaine. L'environnement de travail du LISMMA a favorisé la connexion entre toutes ces disciplines pour aboutir à une chaîne d'outils (banc d'essais, logiciel d'identification et logiciels de simulation) cohérents entre eux. La réduction de modèles comme l'identification sont les disciplines qui sont à l'interface entre les deux mondes des essais et de la simulation. Des travaux de recherche sont actuellement en cours sur le développement d'outils [?] pour construire des modèles réduits pour l'ingénierie des systèmes. C'est l'orientation que prend désormais mon activité de recherche, sans perdre de vue les sujets traités dans ce mémoire.

## Références du Chapitre

- [1] F. Da Silva, G. Chevallier, R. Plateaux, M. Saeli, and J.-L. Dion. Reduced basis for thermal model reduction of electronic power device. Sao Paulo (Brazil), 2012. World Congress on Computational Mechanics.





## Annexe A

# Couplages Electromécaniques

### Contenu du chapitre

Les principaux articles ou actes de congrès sont repris dans cette partie, soient :

- [1] G Chevallier, S Ghorbel, and A Benjeddou. A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures. *Smart Materials and Structures*, 17(6) :065007, December 2008.
- [2] G Chevallier and A. Benjeddou. Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques composites. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, 19(3) :339–364, 2009.
- [3] G. Chevallier, S. Ghorbel, and A. Benjeddou. Piezoceramic shunted damping concept : testing, modelling and correlation. *Mécanique & Industries*, 10(5) :397–411, November 2009.

# A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures

G Chevallier, S Ghorbel and A Benjeddou<sup>1</sup>

LISMMA, Structures, Institut Supérieur de Mécanique de Paris-Supméca,  
3 rue Fernand Hainault, 93407 Saint Ouen CEDEX, France

E-mail: [gael.chevallier@supmeca.fr](mailto:gael.chevallier@supmeca.fr), [salma.ghorbel@supmeca.fr](mailto:salma.ghorbel@supmeca.fr) and [benjeddou@supmeca.fr](mailto:benjeddou@supmeca.fr)

Received 5 May 2008, in final form 1 September 2008

Published 7 October 2008

Online at [stacks.iop.org/SMS/17/065007](http://stacks.iop.org/SMS/17/065007)

## Abstract

An experimental benchmark and its three-dimensional finite element (FE) simulation are presented for free vibration and effective electromechanical coupling of thick smart beams and plates bonded symmetrically on their upper/lower surfaces with a single pair of large piezoceramic patches. The so-called modal effective electromechanical coupling coefficient, which is post-processed from free-vibration analyses under short-circuit and open-circuit electrodes, is proposed as a unified free-vibration benchmarking comparator. For this purpose, the tests are numerically modeled, analyzed, and correlated using the commercial ANSYS<sup>®</sup> FE code. Realistic and desirable features were considered; they concern electrode equipotentiality, piezoceramic patches poling orientations (here opposite), and an FE model electromechanical updating. The original experimental benchmark and its refined modeling and simulation outcomes could be of major interest to smart materials and structures practitioners and researchers.

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version)

## 1. Introduction

As for classical elastic structures, modal property extraction is a critical step for the performance evaluation of piezoelectric adaptive structure applications, either in open loop (shunted damping, damage identification) or closed loop (active vibration or noise control). The boundary conditions (BCs) play here a more crucial role, since modal properties depend not only on the mechanical but also on the electrical ones. Hence, electroded vibrating piezoelectric devices can be electrically connected either in *short circuit*—SC (zero electric potential across electrodes)—or in *open circuit*—OC (zero flowing electric current). Corresponding modal frequencies can be extracted from the resonances of *voltage-driven* (admittance) and *charge-driven* (impedance) frequency response functions (FRFs), respectively [1]. They can also be measured using an impedance analyzer from *resonances* and *anti-resonances* of an electric *admittance* FRF or *anti-resonances* and *resonances* of an electric impedance one [2].

The distinction between SC and OC electric BCs has been well known by the electro-acoustics community since the early 1970s [1–4] but not so much by the mechanical community working on piezoelectric adaptive structures [5]. Hence, depending on the electromechanical coupling effect representation, many finite elements (FEs), without electric degrees of freedom (DOFs), can only provide either SC or OC natural frequencies. The former result from the consideration of the piezoelectric effect via equivalent electric loads only, while the latter are consequent on either analytical or numerical *static condensation* of the electric potential. This shortcoming is also true for several analytical three-dimensional (3D) solutions (see for example [6, 7] for OC frequencies and [8] for SC ones). In fact, only a few studies have provided both frequencies (see for example [9–12] and [13]).

Early piezoelectric FEs were based on the electric potential as an independent variable [14]. They are well suited for the extraction of the SC modal properties, while OC ones could be obtained after a static condensation of the voltage DOFs [11]. Traditionally, no electric BCs are imposed for OC FE analyses. However, the presence of an

<sup>1</sup> Author to whom any correspondence should be addressed.

electrode requires that the nodal electric potentials are identical (for free vibration) and equal to a constant, and that the sum of the nodal charges is constant (nil for free vibration) for the nodes of the electroded area, which is an equipotential (EP) surface [1, 15]. Although necessary, the fulfilment of the above charge condition is rarely mentioned in the open-literature results. Mixed [16, 17] or hybrid [18–20] FEs use the electric displacement(s) or charge as electric DOFs. However, the fulfilment of the voltage-based condition is currently not mentioned in the literature although it is necessary. Here also, the static condensation of the electric charge/displacement(s) DOFs is generally considered [20], so care should be taken for the interpretation of the resulting modal properties.

Careful literature analysis [14] indicates that the main disadvantage of most available piezoelectric FE formulations is that they have not implemented the EP constraint for OC static (sensing) or dynamic (vibration) analyses. In fact, this is a common practice of most numerical method developers [5]. However, it was shown recently [21] that the EP condition has a *charge cancelation effect* that reduces the modal effective *electromechanical coupling coefficient* (EMCC) and even renders some coupled (without EP) modes uncoupled (when EP is applied) [22]. Nevertheless, implementing the EP constraint imposes at least a two step assembly: first on the electrode elements after which the EP is applied, then an assembly of the remaining elements [23]. If the FE contains internal electric DOFs the static condensation has to be handled with great care, in particular for deriving SC and OC eigenvalue problems [24] which are useful for the EMCC evaluation. The latter parameter plays a primary role in several smart structure applications [22, 23], since it measures the conversion of electrical energy to mechanical energy or vice versa.

This paper has the main objective to present an experimental benchmark and its 3D FE simulation for free vibration and effective electromechanical coupling of thick smart beams and plates. It starts with the clarification of the evaluation procedure of the modal properties of piezoelectric adaptive structures and their interpretation and use for smart structure applications. This aims to avoid some confusing comparisons during benchmarking new formulations; for the latter purpose, the modal effective EMCC, which is post-processed from free-vibration analyses under SC and OC electrodes, is proposed as a unified *free-vibration benchmarking comparator*. Then, the proposed experimental benchmark is detailed. It consists of an SC and OC vibrating thick cantilever aluminum structure with a single pair of large piezoceramic patches bonded symmetrically on its upper/lower surfaces in an *opposite poling* (OP) configuration; it has the advantage of being seen as both a short thick beam and a long thick plate. The tests are next numerically modeled, analyzed, and correlated using the commercial ANSYS® FE code. The presented simulations can be seen as refined in the sense that they consider the following realistic and desirable features.

- OP is modeled using positive and negative piezoelectric matrices for upper and lower patches, respectively, when filling the piezoelectric properties data.

- The electrodes' EP physical property was considered via the coupling of the electrodes' electric DOFs.
- SC and OC electric BCs were handled by imposing nil electric potential on the four electrodes for the SC case, and by grounding inner electrodes and leaving the outer ones free for the OC (with EP) one.
- FE models were updated in three ways: first, mechanically, by softening the experimental clamp stiffness using linear springs whose axial stiffness is updated for each configuration so that the difference between FE and experimental fundamental SC frequencies are minimized; then, electrically, by computing the transverse only blocked dielectric permittivity constant from the measured blocked capacities of the individual patches; finally, electromechanically, by combining the previous two methods.

The original experimental benchmark and its refined modeling and simulation outcomes are the main contributions of the present work, that could be of major interest to smart materials and structures' practitioners and researchers.

## 2. Piezoelectric free-vibration problems

The fundamental and variational electromechanical equations, necessary for the piezoelectric adaptive structure behavior description, have already been provided in [5, 14]. Here, the focus is on the constitutive equations used in the formulation of voltage- and charge-based FEs. Then, the free-vibration problems that provide SC and OC modal properties are derived from corresponding discrete equations of motion. Finally, the EMCC is introduced as a unified benchmarking comparator for piezoelectric free vibrations and effective electromechanical coupling of piezoelectric smart structures.

### 2.1. Piezoelectric constitutive equations

The numerically most used 3D piezoelectric constitutive equations, written in matrix form, are

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^E & -\mathbf{e}^t \\ \mathbf{e} & \epsilon^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

where  $\{\mathbf{T}\}$ ,  $\{\mathbf{S}\}$ ,  $\{\mathbf{D}\}$  and  $\{\mathbf{E}\}$  are the mechanical symmetric Cauchy stress and linear strain vectors and electric displacement and field ones, respectively.  $[\mathbf{C}^E]$ ,  $[\mathbf{e}]$  and  $[\epsilon^S]$  are the elastic matrix at constant (SC) electric field, stress piezoelectric matrix and dielectric permittivity matrix at constant (clamped) strain, respectively. Superscript  $t$  denotes a transpose operation.

Equation (1) is used for voltage-based FEs. That used for electric displacement(s) or charge-based FEs is expressed in terms of the strains and electric displacements; i.e.,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^D & -\mathbf{h}^t \\ -\mathbf{h} & \beta^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

where  $[\mathbf{C}^D]$ ,  $[\mathbf{h}]$  and  $[\beta^S]$  are the elastic matrix at constant (OC) electric displacement, piezoelectric strain charge matrix and dielectric impermeability matrix at constant (clamped) strain,

respectively. These constants are related to those of (1) by the following relations [16]:

$$\mathbf{C}^D = \mathbf{C}^E + \mathbf{e}^t(\epsilon^S)^{-1}\mathbf{e}, \quad \mathbf{h} = (\epsilon^S)^{-1}\mathbf{e}, \quad \beta^S = (\epsilon^S)^{-1}. \quad (3)$$

The first relation of (3) indicates that the piezoelectric effect is clearly present for an OC BC. It has a *stiffening effect* (SE) that will have an influence on OC natural frequencies, which are expected to be *inherently higher* than SC ones.

## 2.2. Discrete free-vibration problems

The above piezoelectric constitutive equations (1), (2) have first to be used within the corresponding classical [11, 15] or hybrid [19] variational formulations; then, the FE approximations have to be conducted in order to derive corresponding discrete equations of motions. Hence, the discrete voltage-based harmonic free-vibration problem can be written as

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^E & \mathbf{K}_{em}^{Et} \\ \mathbf{K}_{em}^E & -\mathbf{K}_e^{\epsilon^S} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

where  $[\mathbf{K}_m]$ ,  $[\mathbf{K}_{em}]$ ,  $[\mathbf{K}_e]$  and  $[\mathbf{M}]$  are the mechanical (m), electromechanical (em) and electrical (e) stiffness and mass matrices. The stiffness matrix superscripts E and  $\epsilon^S$  are used to emphasize that the constitutive equations (1) are used.  $\{\mathbf{U}\}$  and  $\{\mathbf{V}\}$  are the mechanical and electrical potential DOF vectors. The latter are supposed to be related to the electrodes only and the EP condition is assumed to be fulfilled; any other internal electric potential DOFs are supposed to be already condensed.  $\{\mathbf{Q}\}$  is the electric surface charge load vector, where the charge condition, due to the presence of electrodes, is also assumed to be fulfilled.

When the electrodes are SC, the electric potential DOF vector is nil, so that (4) reduces to

$$\begin{aligned} ([\mathbf{K}_m^E] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\mathbf{U}^{sc}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{Q}^{sc}\} &= -[\mathbf{K}_{em}^E]\{\mathbf{U}^{sc}\} \end{aligned} \quad (5)$$

where the first relation of (5) represents the eigenvalue problem to be solved in order to get the SC modal properties (natural radial frequencies and modal shapes). It is worthy of notice that, in this case, the piezoelectric behavior has only a *passive* effect (increase of stiffness and mass due to the patches) on the modal properties of the adaptive structure. It is then expected that the SC natural frequencies may differ only marginally from the baseline structure ones. The second relation of (5) can be used for the collection of the generated surface charges. The corresponding patches can be seen then as closed-circuit (here SC) *charge sensors* [25, 26].

When the electrodes are left open, the electric surface charge load vector is now considered nil, so that (4) reduces to

$$\begin{aligned} ([\mathbf{K}_m^E] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\mathbf{U}\} + [\mathbf{K}_{em}^E]^t\{\mathbf{V}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{K}_{em}^E]\{\mathbf{U}\} - [\mathbf{K}_e^{\epsilon^S}]\{\mathbf{V}\} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (6)$$

where, from this equation, the voltage DOF vector can be extracted from the second relation and substituted back into the first one so that (6) transforms to

$$\begin{aligned} ([\mathbf{K}_m^{oc}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\mathbf{U}^{oc}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{V}^{oc}\} &= [\mathbf{K}_{em}^{oc}]\{\mathbf{U}^{oc}\} \end{aligned} \quad (7)$$

with

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_m^{oc}] &= [\mathbf{K}_m^E] + [\mathbf{K}_{em}^E]^t[\mathbf{K}_e^{\epsilon^S}]^{-1}[\mathbf{K}_{em}^E], \\ [\mathbf{K}_{em}^{oc}] &= [\mathbf{K}_e^{\epsilon^S}]^{-1}[\mathbf{K}_{em}^E] \end{aligned} \quad (8)$$

where the first relation of (7) represents the eigenvalue problem to be solved in order to get the OC modal properties.

As can be seen from the first relation of (8), the piezoelectric effect has here both *passive* and *active* (SE due to the coupling) effects on the modal properties of the adaptive structure; it is then expected that OC natural frequencies may differ substantially from the baseline structure ones for coupled modes. The deviation from SC frequencies can then measure the coupling effect. The second relation of (7) can be used to measure the generated voltage and the corresponding patches can be seen as OC *voltage sensors* [25, 26]. Besides, it is worth noticing the resemblance between the first two relations of (3) and those of (8). It is then legitimate to think that OC modal properties can be simply obtained using an SC free-vibration problem, such as that of the first relation in (5), but using the OC elastic properties as in the first relation of (3). Care should be however taken since the EP constraint can not be enforced at the continuum (material) level.

As shown above, the OC free-vibration problem (first relation of (7)) resulted from a *static condensation* of the electric potential DOF vector. Hence, it is normal that researchers who use only this eigenvalue problem for both SC and OC analyses get the same frequencies; this is because they solve only an OC free-vibration problem. So, the popular static condensation of the electric DOF vector has to be taken with care when interpreting resulting modal properties.

The previous analysis of voltage-based formulations can be repeated easily for charge-based ones but the interpretations have to be reversed following the primary/secondary electric independent variable order. Thus, the discrete charge-based harmonic free-vibration problem can be written as

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^D & \mathbf{K}_{em}^{Dt} \\ \mathbf{K}_{em}^D & \mathbf{K}_e^{\beta^S} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

where the stiffness matrix superscripts D and  $\beta^S$  are used to emphasize that the constitutive equations (2) are used.

When the electrodes are left open, the charge DOF vector is nil, so that (9) reduces to

$$\begin{aligned} ([\mathbf{K}_m^D] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\mathbf{U}^{oc}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{V}^{oc}\} &= [\mathbf{K}_{em}^D]\{\mathbf{U}^{oc}\} \end{aligned} \quad (10)$$

where the first relation of (10) represents the eigenvalue problem to be solved in order to get the OC modal properties.

It is worthwhile to recall that the piezoelectric behavior has here *passive* and *active* (SE due to the use of

relations (2), (3)) effects on the modal properties of the adaptive structure. It is then expected that the OC natural frequencies will differ from the baseline structure ones depending mainly on the importance of the active SE contribution. The second relation of (10) can be used to measure the generated voltage. The corresponding patches can be seen as OC *voltage sensors* [19].

When, the electrodes are SC, the electric voltage load vector is now considered nil so that (9) reduces to

$$\begin{aligned} ([\mathbf{K}_m^D] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{U}\} + [\mathbf{K}_{em}^D]^t\{\mathbf{Q}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{K}_{em}^D]\{\mathbf{U}\} + [\mathbf{K}_e^{\beta^S}]\{\mathbf{Q}\} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (11)$$

where, this time, the surface charge DOF vector can be extracted from the second relation and substituted back into the first one so that (11) transforms to

$$\begin{aligned} ([\mathbf{K}_m^{sc}] - \omega^{sc^2}[\mathbf{M}])\{\mathbf{U}^{sc}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{Q}^{sc}\} &= -[\mathbf{K}_{em}^{sc}]\{\mathbf{U}^{sc}\} \end{aligned} \quad (12)$$

with

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_m^{sc}] &= [\mathbf{K}_m^D] - [\mathbf{K}_{em}^D]^t[\mathbf{K}_e^{\beta^S}]^{-1}[\mathbf{K}_{em}^D], \\ [\mathbf{K}_{em}^{sc}] &= [\mathbf{K}_e^{\beta^S}]^{-1}[\mathbf{K}_{em}^D] \end{aligned} \quad (13)$$

where the first relation of (12) represents the eigenvalue problem to be solved in order to get the SC modal properties. The second relation of (12) can be used for the collection of the generated surface charges. The corresponding patches can then be seen as SC *charge sensors*.

Modal reduction is a very useful technique to tackle large size problems, in particular in passive (shunted damping for example [27, 28]) or active control applications. Nevertheless, it requires special care when choosing the modal basis to be used for the projection; this is because a given modal basis will make diagonal only the corresponding stiffness and mass matrices that have been used for its computation; it is then highly recommended to take care of the electric BCs (SC or OC) used during the modal basis extraction for a given voltage- (5, 7)/charge- (10, 12) based formulation. This requires also the use of adequate (SC or OC) properties for the analyses.

### 2.3. Modal effective EMCC as unified free-vibration benchmarking comparator

The EMCC is a measure of the effectiveness with which electrical energy is converted into mechanical energy and vice versa. Several static and dynamic methods can be found in the literature for its evaluation [2–4]. Techniques of interest here are those, either experimental or numerical, that use the SC and OC natural frequencies as defined in the previous section. Hence, at frequencies well below the resonant frequency of a piezoelectric body, the EMCC can be computed via the anti-resonance ( $\omega_a$ ) and resonance ( $\omega_r$ ) radial frequencies extracted from the piezoelectric device experimental electric impedance or admittance FRFs [2, 4]:

$$K_{\text{exp}}^2 \approx \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2}. \quad (14)$$

It was therefore shown [2] that the following formula applies for a given mode when using numerical, such as FE, analyses:

$$K^2 \approx \frac{\omega_{\text{oc}}^2 - \omega_{\text{sc}}^2}{\omega_{\text{sc}}^2}. \quad (15)$$

It was also shown [2] that both formulae (14), (15) are in fact related via the following relation, that has to be considered when comparing experimental and numerical results although they should differ only slightly:

$$K_{\text{exp}}^2 \approx \frac{K^2}{K^2 + 1}. \quad (16)$$

This formula indicates also that both definitions (14), (15) are equivalent for low EMCC. Besides, definition (15) can be directly related to the additional piezoelectric shunted damping (PSD) [28]. It is for these reasons that only the numerical definition (15) is retained hereafter.

As was demonstrated above, when analyzing the vibration of piezoelectric adaptive structures, two eigenvalue problems have to be solved: OC and SC ones. It is then necessary to find a parameter that considers, in a unified manner, resulting frequencies. This will help comparing and benchmarking new advanced piezoelectric models and assessing the adequacy of their electromechanical coupling representation. The modal effective EMCC was already shown to be a good candidate for the latter task (coupling measure) [13]; besides, it was recently used as a piezoceramic patch position and size optimization criterion [21], a PSD performance indicator [22] and an active damage indicator [23]. Hereafter, it is suggested as a unified *free-vibration benchmarking comparator*.

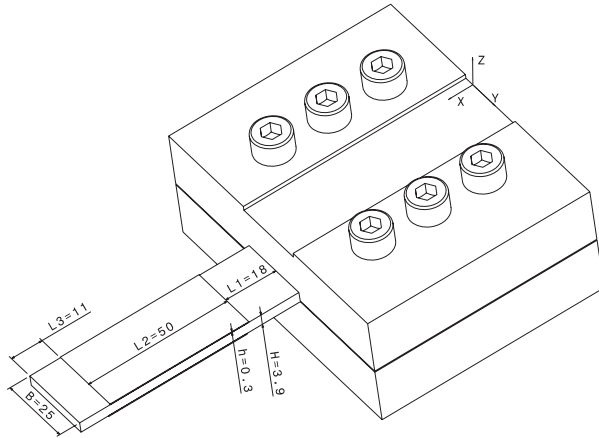
## 3. Benchmark experiments

An experimental benchmark for free vibration and effective electromechanical coupling of thick smart beams and plates is hereafter detailed.

### 3.1. Test article design and experimental set-up

The proposed experimental benchmark was designed and assembled as in figure 1. It consists of a *thick* aluminum cantilever structure, of dimensions  $79 \times 25 \times 3.9 \text{ mm}^3$ , with a single pair of *large* PIC255 PZT patches, of dimensions  $50 \times 25 \times 0.3 \text{ mm}^3$  (purchased from PI Ceramic [29]), glued symmetrically, in an *outward* OP configuration, with a *conductive* epoxy adhesive. Notice that a single patch covers around 65% of the structure major surface and that the length of the beam inside the clamp is 27 mm; the remaining free length of 79 mm was chosen so that distinct SC/OC eigenvalues could be obtained. In fact, it is rather difficult to extract the modal damping for coupled modes. Hence, this free length is a good compromise. Moreover, these dimensions are chosen so that high modal effective EMCC can be reached and various (transverse and in-plane bending, torsion, extension) modes could be measured. It is also hoped that, with this design, some uncoupled modes could be present in the measured spectrum so that the EP constraint numerical *decoupling* effect, observed





**Figure 1.** Cantilever aluminum structure with a single pair of large PZT patches (dimensions in mm).

**Table 1.** Measured capacities and resistances at 100 Hz of the PIC255 patches and structure.

Capacities (nF)			Resistances (k $\Omega$ )		
Left patch	Right patch	Structure	Left patch	Right patch	Structure
50.4	46.74	25.01	1690	3000	5000

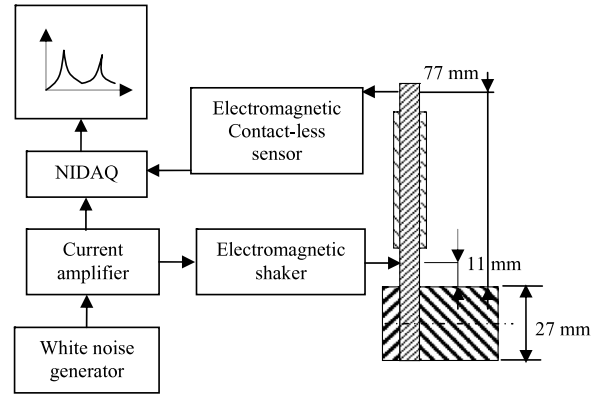
in [22], can be validated. The structure geometric aspect ratios allow its modeling both as a beam and as a plate.

The structure was excited with a random signal using an electromagnetic shaker. A white noise generator (Agilent 33120A) was used to drive the shaker in a [0.1–10] kHz frequency band. The velocity was measured in the [0–10] kHz frequency band using an electromagnetic sensor whose signal was amplified by a current amplifier (Brüel and Kjaer type 2718). The exciter and sensor devices were placed at 11 mm and 77 mm, respectively. The position for the sensor was chosen at the end of the beam because the displacement is rather important there. Thus, it does not necessitate a very accurate sensor. For the shaker, this position is interesting because there is a low coupling between the mass of the shaker and the modes of the beam. The generator and sensor were linked to a National Instrument Data Acquisition card (NI9233), which measures their signals (figure 2).

Using the measured signals, SC and OC FRFs are computed and plotted, using an in-house software, in order to extract the natural frequencies and modal damping ratios. The latter are calculated using the classical –3 dB approach. The transfer functions are H1 functions computed from FFT signals that are weighted by a Hanning window. A sampling frequency of 12.5 kHz and frequency resolution of 0.096 Hz were retained.

Causes of damping are minimized due to the use of an electromagnetic non-contact sensor, a clamp as stiff as possible (heavy steel mass), and specific electric wires as thin as possible.

The capacities and resistances of the patches and structure were measured at 100 Hz by an LCR-meter (HP4284A) and are summarized in table 1. The patch capacities will be used later for the FE model electrical updating.



**Figure 2.** Experimental set-up.

**Table 2.** Measured modal OC/SC frequencies, damping ratios and effective EMCCs.

Mode (type)	1 ( $x$ - $z$ flexion)	2 ( $x$ - $y$ flexion)	3 (torsion)	4 ( $x$ - $z$ flexion)
$f^{oc}$ (Hz)	419.85	1448	1856.85	2989.8
$\xi^{oc}$ (%)	0.24	2.4	1.5	0.7
$f^{sc}$ (Hz)	417.81	1448	1856.61	2955.43
$\xi^{sc}$ (%)	0.26	2.4	1.5	0.74
$K^2$ (%)	0.98	0	0.03	2.34
$K$ (%)	9.91	0	1.61	15.3

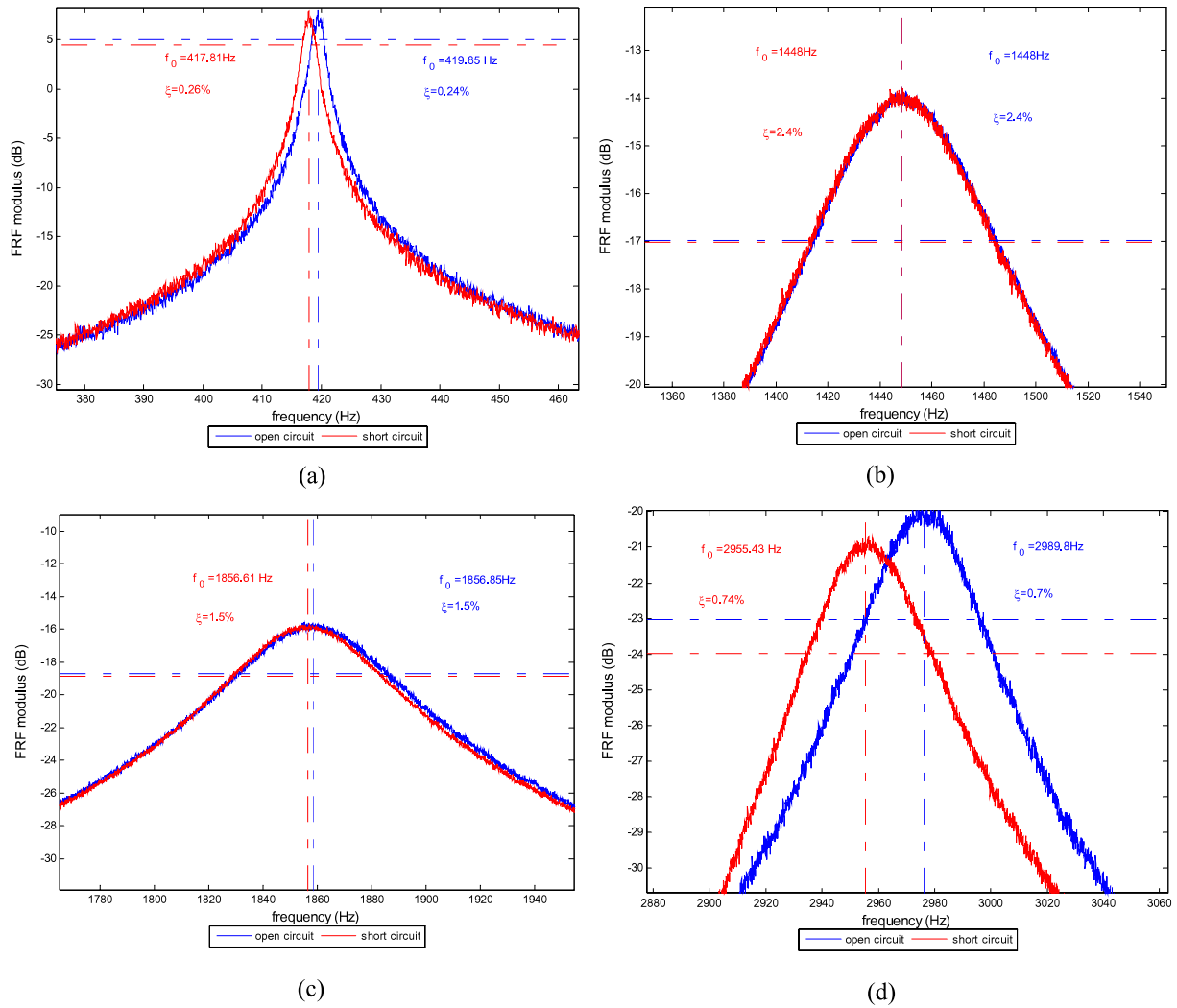
### 3.2. Experimental frequencies and EMCC results

Two experiments were conducted; for the first one, measurements were made in the thickness  $z$ -direction (figure 1); this allowed the presence of  $x$ - $z$  modes 1, 3 and 4. However, for the second experiment, measurements were made in the width  $y$ -direction (figure 1); this gave  $x$ - $y$  modes 2 and 3. Corresponding FRFs are shown in figure 3.

From figure 3, it is clear that the transverse bending (flexion) modes (first and fourth) are coupled with well spaced SC and OC FRFs, in particular for the fourth mode, while the in-plane bending (second) and torsion (third) modes are uncoupled since their SC and OC FRFs are coincident. Modal SC and OC frequencies and their corresponding modal damping ratios, extracted from figure 3, and effective EMCCs, computed with (15), are collected in table 2. The latter confirms previous results from figure 3; i.e., the uncoupled modes are highly damped, while the coupled ones have lower modal damping ratios; it was not possible to reduce further such damping. Besides, transverse bending modes are highly coupled, while the in-plane bending mode and torsion modes are uncoupled. Experimentally, the latter mode had bad repeatability with the present exciter/sensor pair; however, another laser sensing campaign had confirmed that this mode is in fact uncoupled.

### 4. Benchmark simulation

The cantilever adaptive structure shown in figure 1 has been meshed in ANSYS® using quadratic 20-noded-brick FEs as indicated in table 3 and is illustrated in figure 4. SOLID186



**Figure 3.** SC/OC FRFs of the smart structure first four modes: (a) first  $x-z$  mode, (b) first  $x-y$  mode, (c) second  $x-z/x-y$  mode, (d) third  $x-z$  mode.

**Table 3.** FE model geometry and mesh details.

Component	Parameter (figure 1)	Dimension (mm)	Mesh (FE nb.)	FE size (mm)
Structure	L1	18	10	1.8
	L3	11	10	1.1
	L2	50	50	1
	B	25	10	2.5
	H	3.9	1	3.9
Patch	L2	50	50	1
	B	25	10	2.5
	h	0.3	1	0.3

and SOLID226 FEs were selected for the elastic structure and the piezoceramic patches, respectively. The FE model has 1700 elements and 9667 nodes. For consistency, the reduced integration (RI) option was activated for the elastic FE since ANSYS® uses the RI by default for its piezoelectric coupled FEs.

A classical encountered first problem was the incomplete PIC255 PZT material data set provided by the manufacturer [29]. To overcome it, the useful provided data for a simulation were completed using the procedure described in the appendix A and are shown in table 4 together with the aluminum data. The second inconvenience was to fill the code graphic user interface (GUI) for the materials properties with the right data; in fact, ANSYS®, as for other software like ABAQUS® for example, does not use the IEEE Standards on piezoelectricity notations [30] regarding the shear elastic and piezoelectric constants. To avoid eventual mistakes, the use of the engineering constants is highly recommended.

To represent the outward poling directions for the OP configuration, the technique of changing the signs of the patches' individual piezoelectric matrices is used [22]. For this purpose, starting with a unique piezoelectric matrix with the same sign for both patches as in figure 5(a), that represents the classical same poling (SP) configuration, the piezoelectric matrix sign of the lower patch is changed to reach an outward



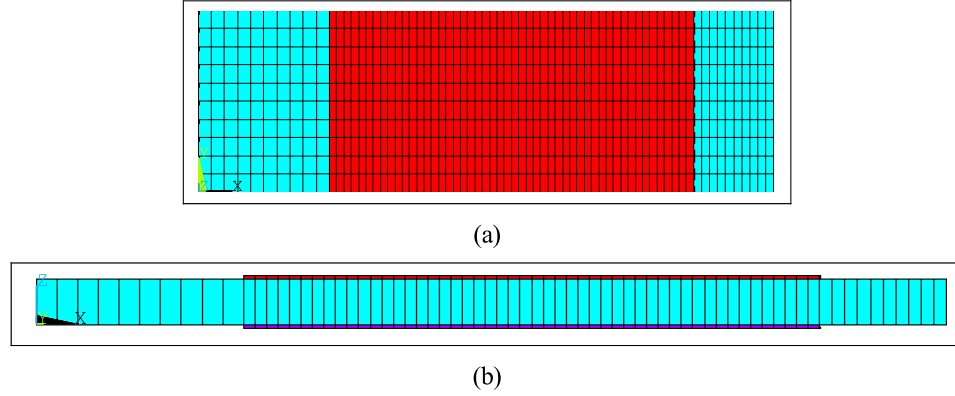


Figure 4. Tested structure FE model: (a)  $X$ - $Y$  in-plane view, (b)  $X$ - $Z$  transverse view.

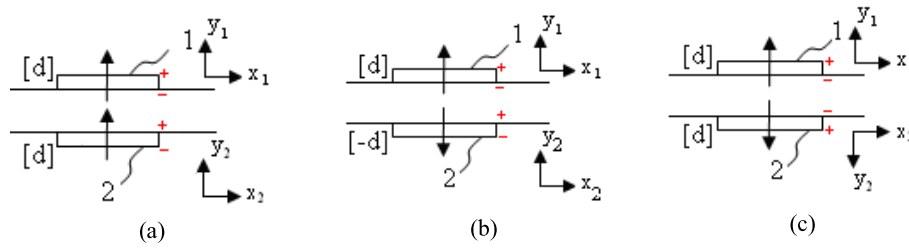


Figure 5. Poling orientation modeling: (a) SP; (b) OP via changing signs; (c) OP via rotating axes.

Table 4. Materials properties.

Materials	Constants (SI unit)	Notations	Values
PIC255 (completed properties, cf. appendix A)	Permittivity	$\epsilon_{11}^S = \epsilon_{22}^S$	8.245
	constants at constant strain	$\epsilon_{33}^S$	7.122
	(nF m <sup>-1</sup> )		
	Stress piezoelectric coupling constants	$e_{31} = e_{32}$	-7.25
	(C m <sup>-2</sup> )	$e_{33}$	14.41
		$e_{15} = e_{24}$	11.57
	SC Young's moduli	$E_1 = E_2$	62.1
	(GN m <sup>-2</sup> )	$E_3$	48.3
	SC Poisson's ratios	$\nu_{12}$	0.32
		$\nu_{13} = \nu_{23}$	0.44
Aluminum (assumed properties)	SC shear moduli	$G_{12}$	23.5
	(GN m <sup>-2</sup> )	$G_{13} = G_{23}$	21
	Density (kg m <sup>-3</sup> )	$\rho$	7800
	Young's modulus (GN m <sup>-2</sup> )	$E$	69
	Poisson's ratio	$\nu$	0.3
	Mass density (kg m <sup>-3</sup> )	$\rho$	2700

OP configuration. This requires the definition of two materials: one for each patch as in figure 5(b). It was shown [22] that this simple procedure is equivalent to that based on defining local coordinate systems on the patches as in figure 5(c), where one material is defined for both patches.

The application of SC and OC electric BCs can be realized in ANSYS® either within the GUI or in a script upon selecting electrode nodes on which the electric BCs are to be applied. Hence, to impose SC electric BCs via the GUI the patches' four

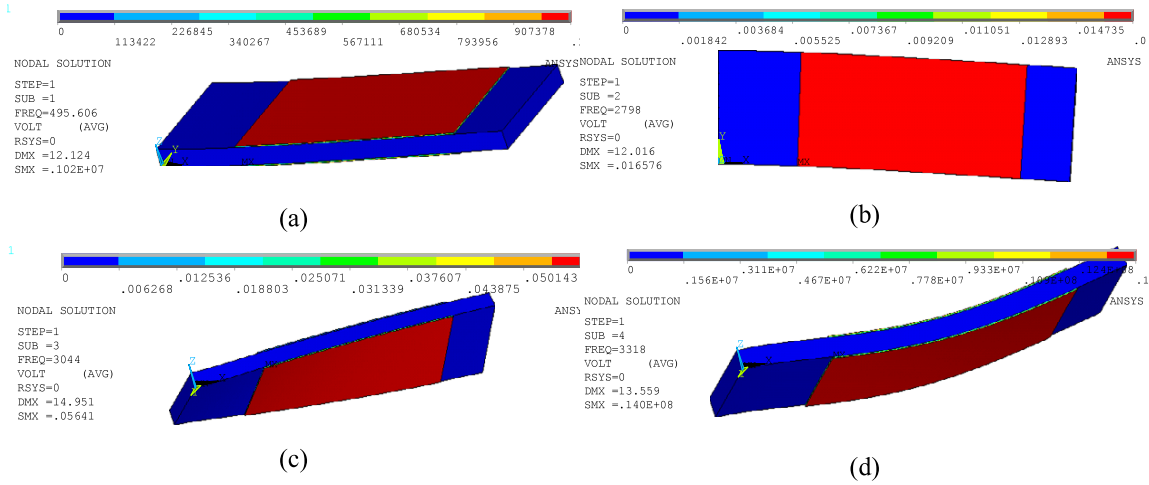
faces' nodes are selected, then a nil potential is applied on them using the command *Preprocessor/Loads/DefineLoads/Apply/Electric/Boundary/OnNodes*, while for the OC case the faces of patches are left charge free. The common way is to not apply any electric condition. However, for physical reasons, the EP condition has to be added by coupling the nodes of each face of the patches. Hence, if the GUI is retained, the *Preprocessor/Coupling/Ceqn/CoupleDOFs* command has to be used.

#### 4.1. Preliminary finite element results

A preliminary non-damped and non-updated FE model simulation is first considered. Results corresponding to the first four modes are shown in figure 6 for the OC electric potential distribution on the patches' electrodes and in table 5 for the SC and OC modal frequencies and post-treated effective EMCCs. It can be noticed that the physical uniform distribution of the electric potential on the patches' electrodes is respected; besides, the modal frequencies are far from the measured ones, in particular for the first three modes, in contrast to the simulated modal effective EMCCs, which are satisfactory except for the fourth mode. Primary reasons could be the experimental clamp softness compared to the stiff modeled one and the non-considered damping. To reach better test/model correlation, the FE model is hereafter updated.

#### 4.2. Test/model correlated results

The FE model is updated in three ways: first, mechanically, by softening the experimental clamp using linear springs whose



**Figure 6.** OC electric potential distribution on the patches' electrodes for the first four modal shapes: (a) first transverse (x-z) bending mode, (b) first in-plane (x-y) bending mode, (c) first torsion mode, (d) second transverse (x-z) bending mode.

**Table 5.** Non-updated FE simulated modal OC/SC frequencies and effective EMCCs.

Mode (type)	1 (x-z flexion)	2 (x-y flexion)	3 (torsion)	4 (x-z flexion)
$f^{oc}$ (Hz)	495.61	2797.9	3044.1	3317.7
$f^{sc}$ (Hz)	493.07	2797.9	3044.1	3249.0
$K^2$ (%)	1.03	0	0	4.27
$K$ (%)	10.16	0	0	20.67

**Table 6.** MU FE simulated modal OC/SC frequencies and effective EMCCs.

Mode (type)	1 (x-z flexion)	2 (x-y flexion)	3 (torsion)	4 (x-z flexion)
$f^{oc}$ (Hz)	453.89	1448.2	2032.6	2743.7
$f^{sc}$ (Hz)	452.05	1448.2	2032.6	2699.6
$K^2$ (%)	0.82	0	0	3.29
$K$ (%)	9.03	0	0	18.15

axial stiffness is tuned in the three displacement directions so that the differences between FE and experimental fundamental SC frequencies are minimized; then, electrically, by using the measured blocked capacities of the individual patches to update the transverse blocked dielectric constant; finally, electromechanically, by combining the previous two methods.

**4.2.1. Mechanically updated FE model results.** To take into account the non-ideal experimental clamp, which does not prevent (block) totally the fixed end displacements as it must in theory, the FE model mechanical updating (MU) is necessary; it is realized by replacing the theoretical clamp BCs by linear springs. Since the clamp cross-section has 53 nodes, 159 springs were attached from one end to each node displacement direction  $x$ ,  $y$ ,  $z$  with the other end left fixed. With trial and error, the different springs' stiffness values were fixed so that the *experimental SC fundamental frequency only* is approached. The obtained results with the stiffness values of  $k_u = 27 \text{ MN m}^{-1}$ ,  $k_v = 60.3 \text{ kN m}^{-1}$  and  $k_w = 130 \text{ kN m}^{-1}$  are shown in table 6. From the latter, it appears clearly that the *experimental clamp modeling is the main source of error*, since both SC and OC frequencies are now reasonably close to the experimental ones but slightly to the detriment of the first modal effective EMCC only.

**4.2.2. Electrically updated FE model results.** The FE model electrical updating (EU) has been considered by computing the

**Table 7.** EU FE simulated modal OC/SC frequencies and effective EMCCs.

Mode (type)	1 (x-z flexion)	2 (x-y flexion)	3 (torsion)	4 (x-z flexion)
$f^{oc}$ (Hz)	494.88	2797.9	3044.1	3297.7
$f^{sc}$ (Hz)	493.06	2797.9	3044.1	3248.9
$K^2$ (%)	0.74	0	0	3.03
$K$ (%)	8.60	0	0	17.40

*transverse only* blocked dielectric permittivity constant from the measured patches' capacities (see table 1) via the following relation:

$$\epsilon_{33}^S = \frac{h}{A} C_p^S \quad (17)$$

where  $h$  and  $A$  are the patch thickness and electrode area, respectively.

After using the resulting values, the EU FE results, shown in table 7, are obtained. As expected, the *EU affects*, but only slightly, *OC frequencies of the coupled modes only* and not the SC ones; hence, only the EMCCs of the coupled modes are also affected and this is better than the MU in particular for the highly coupled fourth mode.

**4.2.3. Electromechanically updated FE model results.** The FE model electromechanical updating (EMU) is made here by combining the previous two methods, i.e. mechanically

**Table 8.** EMU FE simulated modal OC/SC frequencies and effective EMCCs.

Mode (type)	1 (x-z flexion)	2 (x-y flexion)	3 (torsion)	4 (x-z flexion)
$f^{oc}$ (Hz)	453.36	1448.2	2032.6	2731.0
$f^{sc}$ (Hz)	452.05	1448.2	2032.6	2699.5
$K^2$ (%)	0.58	0	0	2.35
$K$ (%)	7.62	0	0	15.32

by softening the clamp stiffness and electrically by using the measured patch capacities. Corresponding results are shown in table 8. From the latter, it can be noticed that the EMU updating led to a satisfactory test/model correlation in particular for the most coupled fourth mode (within an error of only 0.17%) but at the cost of a less accurate EMCC for the first mode. Besides, the frequencies remain within a reasonably acceptable error of 9.5% except for the second mode, whose accuracy is high (within only 0.01% of error).

## 5. Summary and conclusion

This work has presented an *experimental benchmark* and its *3D FE simulation* for *free vibration* and *effective electromechanical coupling of thick smart beams and plates*. It started with the clarification of the evaluation procedure of the modal properties of piezoelectric adaptive structures and their interpretation and use for smart structure applications. This aimed to avoid some confusing comparisons during benchmarking new formulations; for the latter purpose, the modal effective EMCC, which was post-processed from free-vibration analyses under *short-circuit* (SC) and *open-circuit* (OC) electrodes, was proposed as a *unified free-vibration benchmarking comparator*. Then, the proposed experimental benchmark was detailed. It consists of an SC and OC vibrating thick cantilever aluminum structure with a single pair of large piezoceramic patches bonded symmetrically on its upper/lower surfaces in an *opposite poling* configuration; the benchmark has the advantage of being seen both as a short thick beam and a long thick plate. The tests were next numerically modeled, analyzed, and correlated using the commercial ANSYS® FE code. It was shown that reasonably acceptable test/model correlation requires us to (i) take care of the patch poling directions; (ii) consider the *equipotentiality* constraint for OC electrodes; and (iii) conduct *electromechanical updating* of the FE model.

The original experimental benchmark and its refined modeling and simulation outcomes are the main contribution of the present work, that could be of major interest to smart materials and structures' practitioners and researchers.

## Acknowledgment

The support of the European Commission via contract no FP6 NMP3-CT-13517 (CASSEM) is gratefully acknowledged.

## Appendix A. Completing PIC255 manufacturer data

The PIC255 piezoceramic manufacturer's useful data are [29] the following.

- Mass density:  $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ .
- Elastic compliances:  $s_{11}^E = 16.1 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$ ,  $s_{33}^E = 20.7 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$ .
- Strain piezoelectric constants:  $d_{31} = -180 \times 10^{-12} \text{ C N}^{-1}$ ,  $d_{33} = 400 \times 10^{-12} \text{ C N}^{-1}$ ,  $d_{15} = 550 \times 10^{-12} \text{ C N}^{-1}$ .
- Relative dielectric constants:  $\epsilon_{r11}^T = 1650$ ,  $\epsilon_{r33}^T = 1750$  ( $\rightarrow \epsilon_{11}^T = 14.6 \text{ nF m}^{-1}$ ,  $\epsilon_{33}^T = 15.5 \text{ nF m}^{-1}$ ).
- Material coupling factors:  $k_{31} = 0.35$ ,  $k_{33} = 0.69$ ,  $k_{15} = 0.66$ ,  $k_p = 0.62$ .

For a thickness polarized piezoceramic material, with 1–2 isotropic plane, the compliance matrix at constant electric field [ $s^E$ ], the strain piezoelectric matrix [ $\mathbf{d}$ ] and the dielectric permittivity matrix at constant stress [ $\epsilon^T$ ] have the following forms in standard notations [30]:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{s}^E] &= \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \end{bmatrix}, \\
 [\mathbf{d}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [\epsilon^T] &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

From the above known data and (A.1) it appears that only the compliance data are incomplete; that is, in-plane and transverse shear constants remain unknown. A simple procedure is here suggested to get them from the given data only. Hence, from the definitions of the shear  $k_{15}$  and polar  $k_p$  material static coupling factors, the following expressions can be deduced [28, 30]:

$$s_{55}^E = \frac{d_{15}^2}{\epsilon_{11}^T k_{15}^2}, \quad s_{12}^E = -s_{11}^E + 2 \frac{d_{31}^2}{k_p^2 \epsilon_{33}^T}. \tag{A.2}$$

The remaining unknown shear compliance can be deduced from

$$s_{13}^E = -\nu_{13}^E s_{11}^E \tag{A.3}$$

where  $\nu_{13}^E = 0.436$  is assumed.

The stiffness matrix at constant electric field [ $\mathbf{c}^E$ ], stress piezoelectric matrix [ $\mathbf{e}$ ] and dielectric permittivity matrix at constant strain [ $\epsilon^S$ ] are then obtained, respectively, by

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{c}^E] &= [\mathbf{s}^E]^{-1}, & [\mathbf{e}] &= [\mathbf{d}] [\mathbf{c}^E], \\
 [\epsilon^S] &= [\epsilon^T] - [\mathbf{d}] [\mathbf{e}]^t.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

In ANSYS® notations, these matrices can be filled for the

• SC elastic matrix

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.2 & 58.3 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 58.3 & 105.2 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 55.4 & 55.4 & 85.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 \end{bmatrix} 10^9 \text{ N m}^{-2} \quad (\text{A.5})$$

• stress piezoelectric matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.57 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.57 & 0 \\ -7.25 & -7.25 & 14.41 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2} \quad (\text{A.6})$$

and

• relative blocked dielectric permittivity (at constant strains) matrix

$$\begin{bmatrix} EP11 & 0 & 0 \\ 0 & EP22 & 0 \\ 0 & 0 & EP33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 931.22 & 0 & 0 \\ 0 & 931.22 & 0 \\ 0 & 0 & 804.38 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

## Appendix B. List of acronyms

In the order of their first appearance in the text, the following acronyms have been introduced.

FE(s)	Finite element(s)
BC(s)	Boundary condition(s)
SC	Short circuit
OC	Open circuit
FRF(s)	Frequency response function(s)
DOF(s)	Degree(s) of freedom
3D	Three dimensional
EP	Equipotential
EMCC	Electromechanical coupling coefficient
OP	Opposite poling
PZT	Lead zirconate titanate
FFT	Fast Fourier transform
GUI	Graphic user interface
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
SI	Système International (for units)
SP	Same poling
MU	Mechanical updating
EU	Electrical updating
EMU	Electromechanical updating

## References

- [1] Allik H and Webman K M 1974 Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements *J. Acoust. Soc. Am.* **56** 1782–91
- [2] Naillon M, Coursant R H and Besnier F 1983 Analyse de structures piézoélectriques par une méthode d'éléments finis *Acta Electron.* **25** 341–62
- [3] Lerch R 1990 Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **37** 233–47
- [4] Chang S H, Rogacheva N N and Chou C C 1995 Analysis of methods for determining electromechanical coupling coefficients of piezoelectric elements *IEEE Trans. Ultrason. Freq. Control* **42** 630–40
- [5] Benjeddou A 2004 Modelling and simulation of adaptive structures and composites: current trends and future directions, *Progress in Computational Structures Technology* ed B H V Topping and C A Mota Soares (Stirling: Saxe-Coburg Pub.) chapter 10, pp 251–80
- [6] Chen W Q, Xu R Q and Ding H J 1998 On free vibration of a piezoelectric composite rectangular plate *J. Sound Vib.* **218** 741–8
- [7] Ding H J, Chen W Q and Xu R Q 2000 New state space formulations for transversely isotropic piezoelectricity with application *Mech. Res. Commun.* **27** 319–26
- [8] Vel S S, Mewer R C and Batra R C 2004 Analytical solution for the cylindrical bending vibration of piezoelectric composite plates *Int. J. Solids Struct.* **41** 1625–43
- [9] Heyliger P and Brooks S 1995 Free-vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending *Comput. Struct.* **52** 2945–60
- [10] Heyliger P and Saravanas D A 1995 Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezoelectric layers *J. Acoust. Soc. Am.* **98** 1547–57
- [11] Saravanas D A, Heyliger P R and Hopkins D A 1997 Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates *Int. J. Solids Struct.* **34** 359–78
- [12] Heyliger P 2000 Traction-free vibration of layered elastic and piezoelectric rectangular parallelepipeds *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 1235–45
- [13] Deü J F and Benjeddou A 2005 Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic layers *Int. J. Solids Struct.* **42** 2059–88
- [14] Benjeddou A 2000 Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey *Comput. Struct.* **76** 347–63
- [15] Kim J, Varadan V V and Varadan V K 1997 Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices *Int. J. Numer. Methods Eng.* **40** 817–32
- [16] Sze K Y and Pan Y S 1999 Hybrid finite element models for piezoelectric materials *J. Sound Vib.* **226** 519–47
- [17] Sze K Y, Yao L Q and Yi S 2000 A hybrid ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part II—smart structure modelling *Int. J. Numer. Methods Eng.* **48** 565–82
- [18] Thornburgh R P and Chattopadhyay A 2002 Simultaneous modelling of mechanical and electrical response of smart composite structures *AIAA J.* **40** 1603–10
- [19] Thornburgh R P, Chattopadhyay A and Ghoshal A 2004 Transient vibration of smart structures using a coupled piezoelectric-mechanical theory *J. Sound Vib.* **274** 53–72
- [20] Lammering R and Mesecke-Rischmann S 2003 Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells *Smart Mater. Struct.* **12** 904–13

- [21] Trindade M A and Benjeddou A 2008 Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization *Mech. Adv. Mater. Struct.* at press
- [22] Chevallier G, Ghorbel S and Benjeddou A 2007 Passive vibration damping using resistively shunted piezoceramics: experiments simulation and test/model correlation *Research Report no LISMA/Structures-RR0701 (Sept. 2007)*
- [23] Al-Ajmi M A and Benjeddou A 2008 Damage indication in smart structures using modal effective electromechanical coupling coefficients *Smart Mater. Struct.* **17** 035023
- [24] Becker J, Fein O, Maess M and Gaul L 2006 Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping *Comput. Struct.* **84** 2340–50
- [25] Mitchell J A and Reddy J N 1995 A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae *Int. J. Solids Struct.* **32** 2345–67
- [26] Reddy J N 1999 On laminated composite plates with integrated sensors and actuators *Eng. Struct.* **21** 568–93
- [27] Besegna P, Caruso G and Maceri F 2001 A layer-wise Reissner-Minding-type model for the vibration analysis and suppression of piezoactuated plates *Comput. Struct.* **79** 2309–19
- [28] Benjeddou A and Ranger J A 2006 Use of shunted shear-mode piezoceramics for structural vibration passive damping *Comput. Struct.* **84** 1415–25
- [29] [http://www.piceramic.com/deutsch/site/piezo\\_002.html](http://www.piceramic.com/deutsch/site/piezo_002.html).
- [30] IEEE 1988 *IEEE Standards on piezoelectricity* ANS no 176–187

---

# Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques composites

## Caractérisations expérimentale et numérique

Gaël CHEVALLIER — Ayech BENJEDDOU

LISMMA Structures - Institut Supérieur de Mécanique de Paris  
3 rue Fernand Hainaut, 93407 SAINT OUEN CEDEX, France

[gael.chevallier@supmeca.fr](mailto:gael.chevallier@supmeca.fr), [benjeddou@supmeca.fr](mailto:benjeddou@supmeca.fr)

---

**RÉSUMÉ.** Ce travail se focalise sur la caractérisation par analyses vibratoires expérimentale et numérique par éléments finis (EF) du couplage électromécanique effectif d'une plaque composite en configuration libre et instrumentée par un patch piézocéramique. Une caractérisation expérimentale de la plaque composite nue (non instrumentée) est d'abord effectuée afin de valider le modèle EF qui sera utilisé par la suite pour le positionnement du patch sur la base d'un critère de maximum d'énergie de déformation pour les quatre premiers modes de vibration. Ensuite, le couplage effectif modal de la plaque instrumentée est caractérisé expérimentalement et numériquement. La corrélation essais-simulations obtenue est bonne pour les couplages forts mais moins bonne pour les couplages faibles, mettant en relief les problèmes de détermination du couplage par des analyses vibratoires expérimentales.

**ABSTRACT.** This paper focuses on the use of experimental and numerical finite element (FE) modal analyses for the characterization of the effective electromechanical coupling of a composite plate in free configuration and instrumented with a piezoceramic patch. An experimental characterization of the bare (without patch) composite plate is first conducted in order to validate the FE model that will be used later for the piezoceramic patch positioning on the basis of maximum modal strain energy criterion for the first four vibration modes. Then, the modal effective coupling of the instrumented plate is experimentally and numerically characterized. The obtained test-simulation correlation is good for high couplings but less good for low couplings, highlighting the problems of determining the coupling from experimental modal analyses.

**MOTS-CLÉS :** Couplage électromécanique, Piézoélectricité, Analyse modale, Composites.

**KEYWORDS:** Electromechanical coupling, Piezoelectricity, Modal Analysis, Composites.

---

## 1 Introduction

L'association de structures métalliques et des *matériaux avancés*, en tant que capteurs et actionneurs, a fait l'objet de nombreuses recherches depuis trois décennies, d'abord dans les domaines précurseurs marins, spatiaux et aéronautiques, puis en mécanique et récemment en génie civil. Les principales applications concernent le contrôle de bruit, de vibration, de forme et de santé. Parmi, les matériaux avancés, ceux qui sont les plus utilisés en tant que capteurs et actionneurs sont les *matériaux piézocéramiques*, principalement sous forme de *patches* (pastilles). La performance de ces derniers dépend du *couplage électromécanique* résultant de cette association, qui lui-même dépend principalement de leur interaction, donc de la qualité d'adhésion avec la structure d'accueil ; les autres facteurs influençant le couplage sont la *position*, le ratio des rigidités et la taille.

Cependant, grâce à la montée en flèche ces dernières années de l'usage des composites dans le domaine aéronautique en particulier, l'association de structures en *matériaux composites*, notamment les stratifiés (laminés), avec des matériaux piézocéramiques (par collage à posteriori ou intégration durant la fabrication) attire depuis une dizaine d'année, mais insuffisamment, l'attention des chercheurs principalement pour le contrôle des vibrations de manière passive, par patches shuntés (Saravanas, 1999 ; Tanimoto, 2007), ou/et active (Moon et Kim, 2001) ; ces travaux sont numériques par éléments finis (EF) excepté (Tanimoto, 2007) qui a étudié expérimentalement des poutres composites. Les modèles EF proposés utilisent des formulations classiques, en déplacement mécanique-potentiel électrique (Saravanas, 1999), ou hybride électriquement, en déplacement mécanique – déplacement électrique (Moon et Kim, 2001), validée expérimentalement pour les composites dans (Thornburgh et al, 2004). Le positionnement des patches a été étudié seulement dans (Moon et Kim, 2001) par optimisation à l'aide d'un algorithme génétique (AG). La même technique a été proposée dans (Araújo et al, 2009) pour les composites.

Il est fort connu (Hagood et von Flotow, 1991) que le *coefficient de couplage électromécanique* (CCEM) généralisé est un bon indicateur de l'amortissement des vibrations de poutres métalliques ajouté par des patches piézocéramiques shuntés. Depuis, le CCEM a été proposé comme paramètre *unique* de comparaison des analyses vibratoires en *court-circuit* (CC) et *circuit-ouvert* (CO) des structures piézoélectriques (Deü et Benjeddou, 2005), critère de *positionnement* des patches (Trindade et Benjeddou, 2008) et d'indication d'*endommagement* (Al-Ajmi et Benjeddou, 2008). Son évaluation numérique, en particulier approximative, a fait l'objet de plusieurs recherches (Benjeddou, 2009ab).

Ce travail étend les efforts de recherches des présents auteurs sur la caractérisation par analyses vibratoires expérimentale et numérique par EF du CCEM (Chevallier et al, 2008, 2009 ; Benjeddou et al, 2009ab) des structures métalliques pour des structures *composites* munies de patches piézocéramiques. Ainsi, dans ce qui suit et après des rappels théoriques sur le CCEM, l'analyse vibratoire

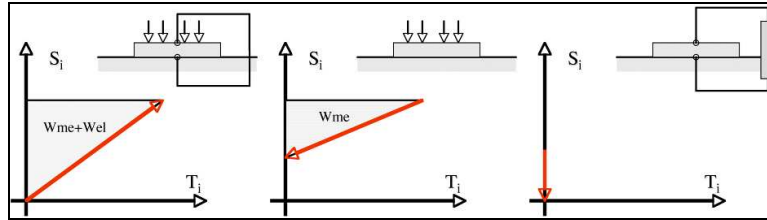


expérimentale conduite sur une plaque composite nue (non instrumentée) est d'abord présentée ; elle servira à évaluer le CCEM de manière *approchée* et à valider le modèle EF qui sera utilisé par la suite pour le *positionnement* d'un patch sur la même plaque à l'aide d'un critère de maximum d'énergie de déformation modale (EDM), utilisé classiquement pour des structures métalliques (Becker et al, 2006 ; Kumar et Narayanan, 2007 ; Fein, 2008). Ensuite, le CCEM effectif modal de la plaque instrumentée est caractérisé expérimentalement et numériquement par des méthodes approchées utilisables sans *matériel* (analyseur d'impédance) et *logiciels* d'EF (piézoélectrique couplé) *spécifiques*, encombrants et coûteux.

## 2 Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques

Le CCEM peut être vu comme le rapport entre l'énergie électrique produite ou injectée sur un cycle de fonctionnement et l'énergie mécanique produite ou injectée sur le même cycle de fonctionnement. Selon la norme sur la piézoélectricité (IEEE, 1988), le CCEM matériel peut être évalué à l'aide du cycle quasi-statique de chargement de la Figure 1 dont la séquence idéalisée de conversion mécanique/électrique comprend successivement :

- un chargement mécanique *unidirectionnel* en CC électrique qui conduit au stockage des énergies mécanique  $W_{me}$  et électrique  $W_{el}$ .
- la décharge mécanique en CO permet de quantifier  $W_{me}$ .
- enfin, le circuit de *shunt* permet de décharger l'énergie électrique  $W_{el}$ .



**Figure 1.** Cycle quasi-statique d'évaluation du CCEM matériel  $k_{ij}$ .

Le ratio des énergies électrique et totale définit le CCEM matériel  $k_{ij}$  par

$$k_{ij}^2 = \frac{W_{el}}{W_{el} + W_{me}} = \frac{d_{ij}^2}{s_{jj}^E \epsilon_{ii}^T} \quad [1]$$

Où,  $d_{ij}$ ,  $s_{jj}^E$  et  $\epsilon_{ii}^T$  sont les constantes piézoélectriques de *déformation*, de *souplesse* à champs électrique constant, et diélectrique à *contrainte* constante. Les indices  $i$  et  $j$  indiquent, respectivement, les directions du champ ou polarisation électrique et de la contrainte appliquée ou déformation induite.



Par analogie au régime de vibrations harmoniques autour d'un mode propre de la structure instrumentée, on peut introduire le CCEM *effectif* modal de la structure piézoélectrique adaptative comme étant le ratio de la différence entre les EDM en CO,  $W_{co}$ , et en CC,  $W_{cc}$ , par rapport à cette dernière

$$K^2 = \frac{W_{co} - W_{cc}}{W_{cc}} \quad [2]$$

En normalisant les modes propres de la structure par rapport à la masse, la relation précédente permet de définir le CCEM effectif modal en fonction des pulsations en CO et CC comme suit

$$K^2 = \frac{\omega_{co}^2 - \omega_{cc}^2}{\omega_{cc}^2} \quad [3]$$

L'enjeu réside donc, de point de vue expérimental, dans l'évaluation précise des fréquences propres lorsque le circuit est ouvert et lorsque le circuit est fermé (court-circuit). De point de vue numérique, la précision du résultat dépend surtout de la présence d'un degré de liberté (DDL) électrique. De nombreuses formulations analytiques ou numériques sont basées sur la condensation des équations électriques et ne permettent de déterminer avec précision que l'une ou l'autre des configurations en CC ou CO. D'autre part, les formulations implémentées dans les codes EF commerciaux, tels qu'Abaqus®, Ansys®, ou Samcef® par exemple, sont basées sur l'usage explicite du potentiel électrique comme DDL. Avec ces formulations, les fréquences en CC sont calculées en imposant des potentiels nuls sur les électrodes des patches, alors que les fréquences en CO doivent être obtenues en imposant seulement l'*équipotentialité* (EP) des électrodes qui est une condition de grande importance physique et numérique (Al-Ajmi et Benjeddou, 2008 ; Chevallier et al, 2008, 2009 ; Trindade et Benjeddou, 2008).

Le problème variationnel de vibrations libres en régime harmonique de pulsation  $\omega$  d'un milieu piézoélectrique de volume  $\Omega$  formulé, dans les espaces fonctionnels réguliers adéquats, en déplacement mécanique,  $\{u\}$ , et potentiel électrique,  $\varphi$ , est donné par

$$\int_{\Omega} \{\delta S\}^t \{T\} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \{\delta u\}^t \rho \{u\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta E\}^t \{D\} d\Omega = 0 \quad [4]$$

Où le symbole  $\delta$  et l'exposant  $t$  indiquent les opérations de variation et de transposition ;  $\rho$  est la masse volumique du matériau piézoélectrique ; les composantes des vecteurs des déformations  $\{S\}$  et du champ électrique  $\{E\}$  sont définies en fonction de celles des déplacements mécaniques et du potentiel électrique, respectivement, par

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i} \quad [5]$$

$\{T\}$  et  $\{D\}$  sont les vecteurs des contraintes et déplacement électrique, qui sont liés à ceux des déformations et champ électrique par les lois de comportement piézoélectriques suivantes de la *forme e*

$$\begin{Bmatrix} T \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^E & -e^t \\ e & \epsilon^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ E \end{Bmatrix} \quad [6]$$

Où  $[C^E]$ ,  $[e]$  et  $[\epsilon^S]$  sont les matrices des *raideurs* élastiques à champ électrique constant, des constantes piézoélectriques de *contraintes*, et des constantes diélectriques à *déformations* constantes.

Contrairement à la matrice de l'équation [6], celle des lois de comportement de la *forme d*, utilisées pour la caractérisation *expérimentale* d'un matériau piézoélectrique, est symétrique et définie positive

$$\begin{Bmatrix} S \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S^E & d^t \\ d & \epsilon^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ E \end{Bmatrix} \quad [7]$$

Où  $[S^E]$ ,  $[d]$  et  $[\epsilon^T]$  sont les matrices des *souplesses* élastiques à champ électrique constant, des constantes piézoélectriques de *déformations*, et des constantes diélectriques à *contraintes* constantes.

A partir de cette relation un CCEM *tensoriel* est introduit pour tenir compte du caractère *anisotrope* inhérent à la piézoélectricité (Avellaneda et Olson, 1993)

$$[k^2] = [\epsilon^T]^{-1/2} [d] [S^E]^{-1} [d]^t [\epsilon^T]^{-1/2} \quad [8]$$

Cette définition généraliserait donc celle donnée en [1] et pourrait être utilisée dans le cas de champs non uniformes et chargements non unidirectionnels. Du fait de l'anisotropie, on retrouve bien pour un matériau piézocéramique (isotrope transverse dans le plan 1-2) le CCEM matériel en cisaillement  $k_{15}$  mais pas ceux transverse  $k_{31}$  et longitudinal  $k_{33}$  définis par la dernière relation de l'équation [1] ; on retrouve plutôt le *nouveau* CCEM matériel tridimensionnel (3D) suivant

$$k_{3D}^2 = (\epsilon_{33}^T)^{-1} \left[ 2(C_{11}^E + C_{12}^E) d_{31}^2 + 4C_{13}^E d_{31} d_{33} + C_{33}^E d_{33}^2 \right] \quad [9]$$

On montre, non pas à partir de cette relation mais de l'expression générale dans le cas d'un matériau piézoélectrique orthotrope (cf. annexe A), que ce CCEM matériel 3D dégénère bien à ceux unidirectionnels de l'équation [1].

La méthode des EF permet de discrétiser le problème variationnel [4] et de le transformer au système linéaire global d'équations algébriques suivant

$$\left( \begin{bmatrix} K_m & K_c \\ K_c^t & -K_e \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [10]$$

Où,  $\{U\}$  et  $\{\Phi\}$  sont les DDL du type déplacements et potentiels électriques des électrodes ; les DDL internes du type potentiel électrique sont supposés déjà condensés et la condition d'EP est supposée déjà prise en compte de manière à ce que seul un DDL électrique subsiste par électrode. Les blocs de matrices  $K_m$ ,  $K_c$  et  $K_e$  sont les contributions mécanique (éventuellement modifiée par la condensation des DDL électriques internes), de couplage mécanique-électrique et électrique à la matrice de rigidité couplée globale.

Selon les conditions limites électriques considérées, deux problèmes de vibrations libres découlent du problème couplé [10] ; le premier correspond au cas CC (potentiels nuls sur les électrodes) qui s'écrit ainsi ( $[K_m^{cc}] = [K_m]$ )

$$([K_m^{cc}] - \omega_{cc}^2 [M]) \{U^{cc}\} = \{0\} \quad [11]$$

Le deuxième problème de vibration correspond au cas CO (potentiels *inconnus* mais *uniformes* sur les électrodes) qui s'écrit ainsi

$$([K^{co}] - \omega_{co}^2 [M]) \{U^{co}\} = \{0\} \quad [12]$$

Avec

$$[K^{co}] = [K_m^{cc}] + [K_c][K_e]^{-1}[K_c]^t, \quad \{\Phi^{co}\} = [K_e]^{-1}[K_c]^t \{U^{co}\} \quad [13]$$

La résolution des deux problèmes [11] et [12] permettra donc d'évaluer le CCEM à l'aide de la définition [3]. De plus, si les déformées modales obtenues avec des conditions électriques en CO ou CC sont *quasi-identiques* ( $\{U^{co}\} \approx \{U^{cc}\} = \{U\}$ ) alors, il est possible de montrer à partir de [13] et grâce à la définition [2] que pour le  $i^{\text{ème}}$  mode le CCEM effectif s'écrit ainsi

$$K_i^2 \approx \frac{\{U_i\}^t ([K_c][K_e]^{-1}[K_c]^t) \{U_i\}}{\{U_i\}^t [K_m^{cc}] \{U_i\}} = \frac{\{\Phi_i^{co}\}^t [K_e] \{\Phi_i^{co}\}}{\{U_i\}^t [K_m^{cc}] \{U_i\}} \quad [14]$$

Le CCEM effectif modal est donc le rapport de l'énergie électrique disponible à la conversion et de celle de l'énergie totale quand les patchs sont en CC. D'autre part, en séparant les énergies mécaniques de la structure nue,  $W_s$ , de celle des patchs piézoélectriques en CC,  $W_p^{cc}$ , la 1<sup>ère</sup> relation de [14] fournit, pour un mode de réponse piézoélectrique  $ij$  ( $ij=31, 33$  et  $15$  pour les modes transverse, longitudinal et de cisaillement, respectivement), l'approximation suivante (Benjeddou, 2009a)

$$K_{ij}^2 = \frac{K_{p,jj}^{co} - K_{p,jj}^{cc}}{K_{s,jj} + K_{p,jj}^{cc}} \approx \frac{k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2} \frac{K_{p,jj}^{cc}}{K_{s,jj} + K_{p,jj}^{cc}} \approx \frac{k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2} \frac{\omega_{cc}^2 - \omega_s^2}{\omega_{cc}^2} \quad [15]$$

Les travaux sur le couplage des structures métalliques piézoélectriques (Benjeddou et Ranger-Vieillard, 2006; Hollkamp et Gordon, 1996 ; Hagood et von Flotow, 1991) montrent qu'il est possible de calculer le CCEM transverse avec une bonne précision pour les premiers modes en projetant le modèle sur la base des modes de la structure non instrumentée comme suggéré par l'équation [15]. En effet, les matériaux métalliques ont des propriétés de rigidité et de masse proches de celle des céramiques piézoélectriques. De plus les patchs sont en général de dimensions faibles devant celles de la structure instrumentée. Les modes de la structure non instrumentée sont donc proches de ceux de la structure instrumentée. Cependant, cette observation tend à s'invalider avec l'augmentation de l'ordre du mode (Benjeddou et Ranger-Vieillard, 2006 ; Ranger, 2007).

Dans [15] il a été supposé que  $K_{p,jj}^{cc} \approx (1 - k_{ij}^2) K_{p,jj}^{co}$  ; en utilisant cette relation à nouveau dans la 1<sup>ère</sup> de [15], on peut démontrer (Benjeddou, 2009a ; Trindade et Benjeddou, 2008) l'analogie suivante avec l'*amortissement effectif* d'une structure vibrante amortie par un patch *viscoélastique* ou la partie imaginaire de sa rigidité complexe est représentée par la rigidité du patch piézoélectrique en CO

$$K_{ij}^2 \approx k_{ij}^2 \frac{K_{p,jj}^{co}}{K_{s,jj} + K_{p,jj}^{cc}} \approx k_{ij}^2 \frac{\{U\}^t [K_p^{co}] \{U\}}{\{U\}^t ([K_s] + [K_p^{cc}]) \{U\}} \quad [16]$$

Le CCEM effectif modal s'interprète donc comme le produit du CCEM matériel d'un mode de réponse  $ij$  par la *fraction* d'énergie de déformation dans le patch en CO lorsque la structure instrumentée vibre dans un mode mécanique donné. Par conséquent, par analogie avec le positionnement de patchs viscoélastiques, de nombreuses études (Becker et al, 2006 ; Kumar et Narayanan, 2007 ; Fein, 2008) se basent sur la cartographie d'EDM pour effectuer le positionnement des patchs piézoélectriques. En effet, d'après l'équation [16], la position optimale du patch est située là où la fraction de l'EDM contenue dans le patch est maximale.

Il est important de rappeler que les approximations [15] et [16] du CCEM effectif sont valides seulement pour des modes de réponses piézoélectriques (cisaillement, transverse et longitudinal) découplés. Par exemple, la relation [15] devrait être utilisée avec  $k_{31}$  pour les applications utilisant des patchs polarisés dans l'épaisseur ; ici, on propose de *comparer* cette pratique courante à une *nouvelle* utilisant  $k_{3D}$  dans [15]. On pourrait faire de même pour [16].

### 3 Analyses modales expérimentale et numérique de la plaque composite nue

Afin de s'assurer de la validité du modèle EF de la plaque composite, une analyse modale expérimentale de la plaque nue a été conduite. Elle a pour but de reconstruire les déformées des premiers modes propres via la mesure des fonctions de réponse en fréquence (FRF) sur la plaque suspendue par deux fils simulant des conditions limites en libre-libre. Elles pourront servir à valider le calcul du CCEM

effectif modal par le rapport des énergies modales à l'aide de la dernière relation de [14] et à étudier l'efficacité du critère d'EDM pour le positionnement du patch. Quant aux fréquences obtenues, elles seront utilisées pour valider la méthode approchée d'évaluation du CCEM effectif modal défini par la relation [15].

### 3.1 Analyse expérimentale de la plaque composite nue

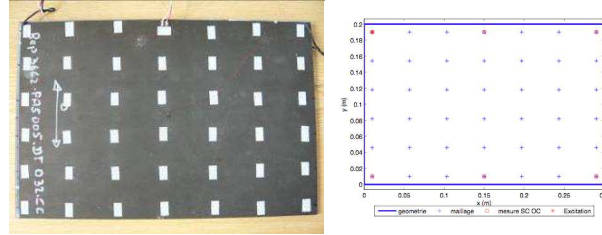
Une plaque composite, de dimensions  $300 \times 200,3 \times 4,2 \text{ mm}^3$  et de masse volumique  $\rho = 1521 \text{ Kg/m}^3$  mesurées, a été étudiée dans une configuration libre-libre pour s'affranchir des difficultés inhérentes à la modélisation des fixations expérimentales par des conditions aux limites idéalisées (Chevallier et al, 2008). Le dispositif expérimental de caractérisation de la plaque est montré dans la Figure 2.



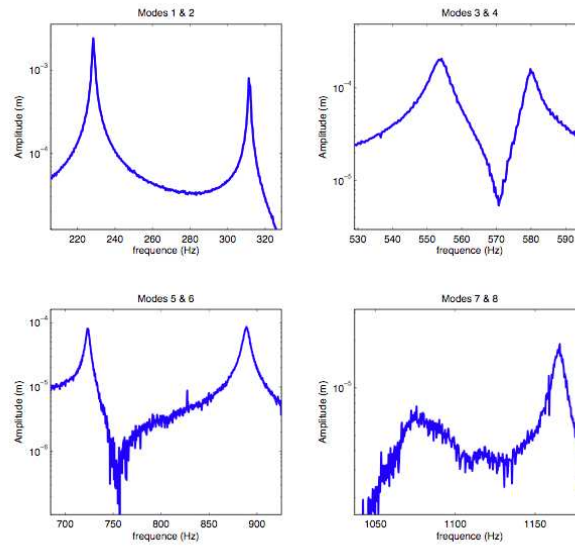
**Figure 2.** *Dispositif expérimental de caractérisation de la plaque.*

La détermination des FRF est classique en mécanique vibratoire. Toutefois étant donné que la structure est de petite taille et très légère, une solution de *mesure* et d'*excitation sans contact* a été retenue. En effet, une première tentative avec un excitateur électromagnétique (pot vibrant) et un accéléromètre piézoélectrique a montré que la masse de ces derniers influençait le résultat en termes de fréquence mais aussi de déformée modale (Ghorbel, 2009). Un vélocimètre laser (de marque Polytec®) a donc été utilisé pour la mesure de la vitesse (Figure 2) ; il permet une résolution inférieure à  $1 \mu\text{m}$  dans la bande de fréquence  $[100-2000] \text{ Hz}$ . D'autre part, l'excitation est faite par un marteau de choc équipée d'un capteur de force piézoélectrique (de marque Bruel & Kjaer®). La plaque composite est accrochée au support par une suspension souple qui reproduit au mieux les conditions libre-libre. Les signaux issus du vélocimètre et du capteur de force, correspondants au maillage expérimental de la Figure 3, sont envoyés à une carte National Instrument 9233 et traités sur un logiciel d'analyse modale développé en interne sous Matlab®.

Les signaux temporels sont pondérés par une fenêtre de Hanning et transformés dans le domaine fréquentiel par la fonction *fft* de Matlab®. La fonction de transfert est reconstruite via la fonction H1 sur une moyenne de 5 blocs d'acquisition. Un exemple de cette fonction est montré sur la Figure 4.



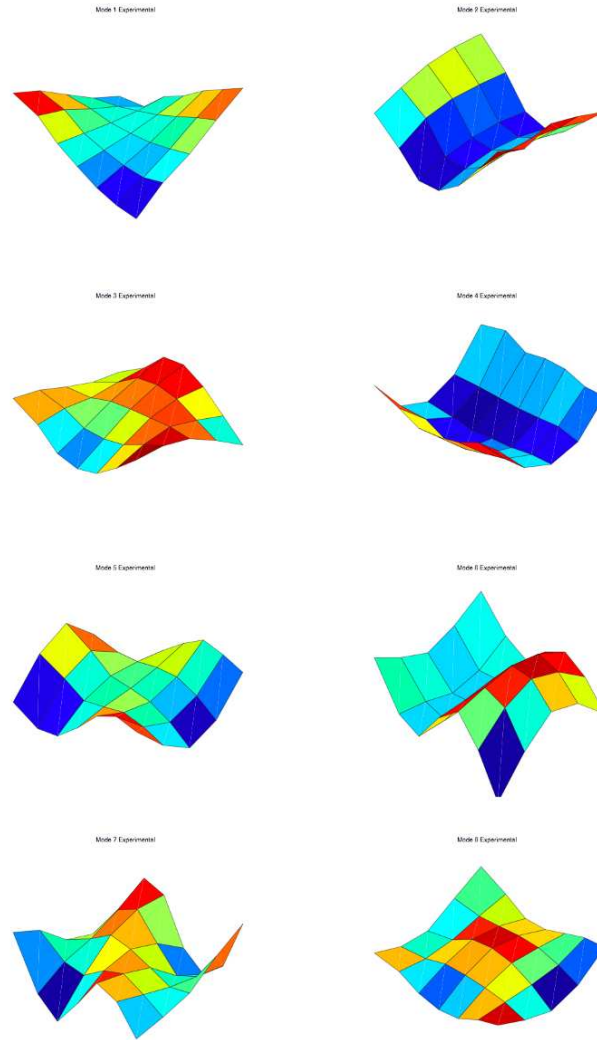
**Figure 3.** Maillage expérimental : positions des cibles pour le laser et le point d'excitation en haut à gauche.



**Figure 4.** Exemple de FRF sous excitation au marteau et mesure au laser.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Fréq. exp. (réf.)	229,3	310,9	554,6	581	724,7	889,1	1068,4	1163,7
Fréq. EF	235,3	319,6	569,8	595,3	741,7	913,3	1098,3	1198,5
Erreurs (%)	2,6	2,8	2,7	2,5	2,3	2,7	2,8	3,0

**Tableau 1.** Fréquences propres expérimentales et par EF de la plaque nue.



**Figure 5.** *Déformées modales expérimentales de la plaque composite nue.*

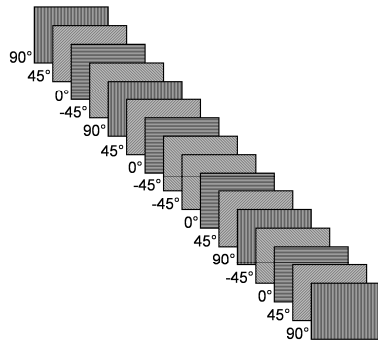
Dans les conditions expérimentales retenues, il a été possible de déterminer avec une bonne précision (résolution fréquentielle inférieure à 0,5 Hz) les fréquences propres (Tableau 1). La plaque étant rectangulaire, aucun mode multiple n'est à signaler, les modes ont donc des fréquences distinctes. La densité modale dans la bande [0-1200 Hz] est faible, ce qui rend aisée la séparation des modes.

Les déformées modales expérimentales ont été reconstruites en lissant les fonctions de transfert mesurées pour chaque point du maillage représenté sur la Figure 3. Elles sont représentées sur la Figure 5.

Cette étape a permis de connaître le comportement de la plaque composite nue. Les mesures faites serviront à valider le modèle EF présenté ci-après.

### 3.2 Analyse par éléments finis de la plaque composite nue

La plaque est constituée d'un composite stratifié symétrique de 16 plis avec une séquence d'empilement  $[90/45/0/-45]_{2S}$  (voir Figure 6). Les propriétés des matériaux de ces plis ont été obtenues (Tableau 2) pour une plaque similaire de dimensions  $300 \times 200 \times 4.13 \text{ mm}^3$  au moyen d'une procédure d'optimisation basée sur un modèle EF de plaque multicouche (*Layerwise* – LW) avec cisaillement et la minimisation par algorithmes génétiques de l'erreur entre les fréquences mesurées et numériques (Araujo et al, 2009). Il est à noter que la symétrie de la structure du stratifié devrait conduire à un comportement *quasi-isotrope transverse* si l'on excepte les termes  $G_{12}$  et  $G_{13}$  (qui auraient dû être égaux) pour lesquels la technique d'identification a fourni des valeurs incohérentes. Les données matériau sont donc renseignées comme si le matériau était *orthotrope*.



**Figure 6.** Séquence  $[90/45/0/-45]_{2S}$  de l'empilement de couche de la plaque.

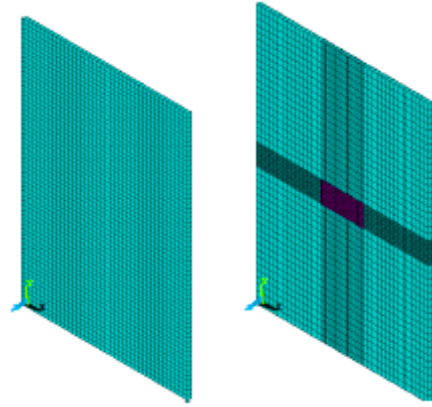
Constantes Ingénieur	$E_1$ (GPa)	$E_2 = {}^*E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12} = {}^*\nu_{13}$	${}^*\nu_{23}$
Valeurs	129,8	10,9	5,7	4,4	3,2	0,37	0,55

**Tableau 2.** Données identifiées (ou  ${}^*$ complétées) du matériau composite.

La plaque composite est simulée en utilisant l'EF 3D multicouche à 20 noeuds (C3D20) du logiciel commercial Abaqus® qui utilise une description laminée classique (*Equivalent Single Layer* - ESL) de la cinématique. Après une étude de



convergence des résultats sur les huit premiers modes étudiés, le maillage EF retenu comprend 17303 nœuds et 2400 éléments (Figure 7, gauche). L'algorithme de Lanczos est utilisé pour extraire les fréquences et modes propres de la plaque.



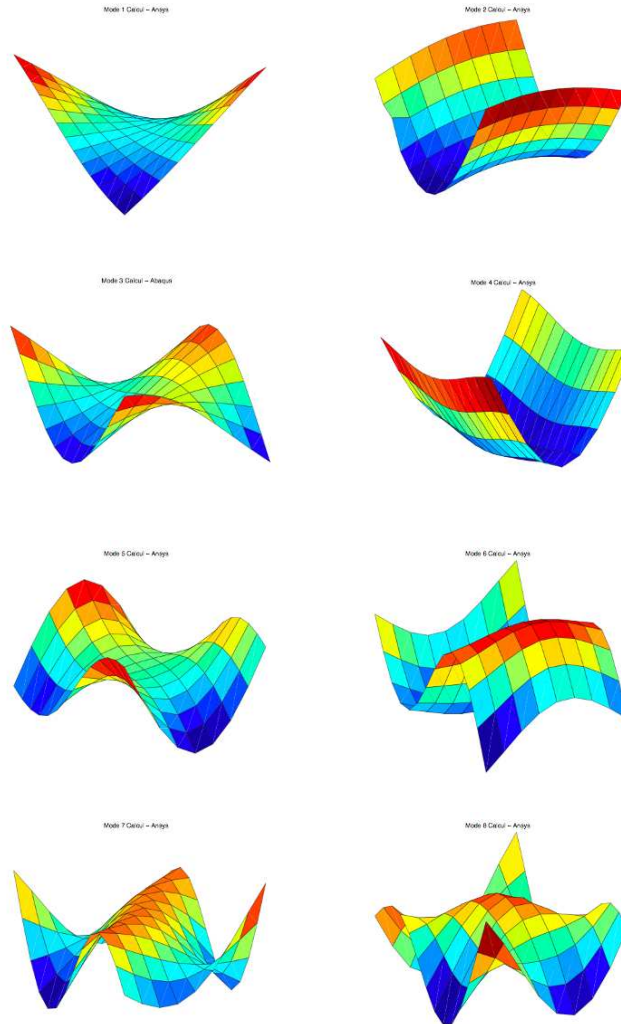
**Figure 7.** Maillages EF de la plaque nue (gauche) et instrumentée (droite).

Les fréquences propres numériques obtenues et leurs erreurs correspondantes par rapport aux fréquences expérimentales pour les huit premiers modes sont présentées dans le Tableau 1. Des erreurs faibles ( $\leq 3\%$ ) sont obtenues pour tous les modes. Les fréquences propres mesurées sont toujours inférieures aux fréquences calculées, ce qui sous-entend peut-être que les constantes identifiées surestiment celles de la présente plaque.

Les déformées modales numériques (Figure 8) correspondent à celles identifiées expérimentalement (Figure 5). Cette correspondance est confirmée par le calcul de la matrice de MAC (*Modal Assurance Criterion*) présentée dans la Figure 9. La matrice de MAC est la matrice de corrélation modale ; elle est souvent utilisée pour la comparaison entre deux ensembles de modes propres. Les modes expérimentaux et numériques sont ces deux ensembles dans le cas de la Figure 9. On écrit donc

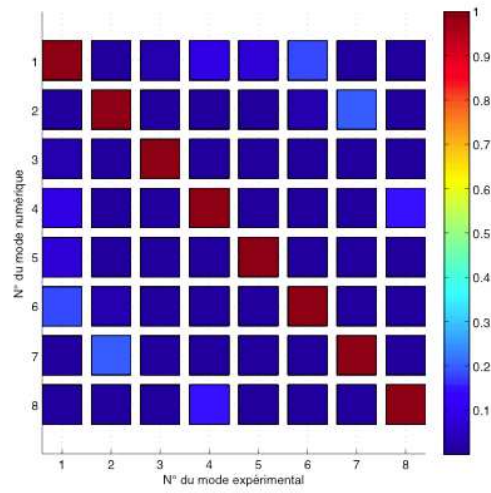
$$MAC_{ij} = \frac{(\phi_{num}^i)^T \phi_{exp}^j}{\sqrt{(\phi_{num}^i)^T \phi_{num}^i} (\phi_{exp}^j)^T \phi_{exp}^j}} \quad [17]$$

La diagonale de cette matrice a un MAC égal à 1 pour les huit premiers modes ; ainsi les déformées modales numériques et expérimentales sont colinéaires entre modes de même fréquence. En outre la propriété d'orthogonalité entre modes expérimentaux et numériques est respectée puisque les termes non-diagonaux sont quasi nuls. A ce stade, un modèle numérique représentatif du comportement de la plaque composite réelle est disponible pour la suite des analyses numériques.

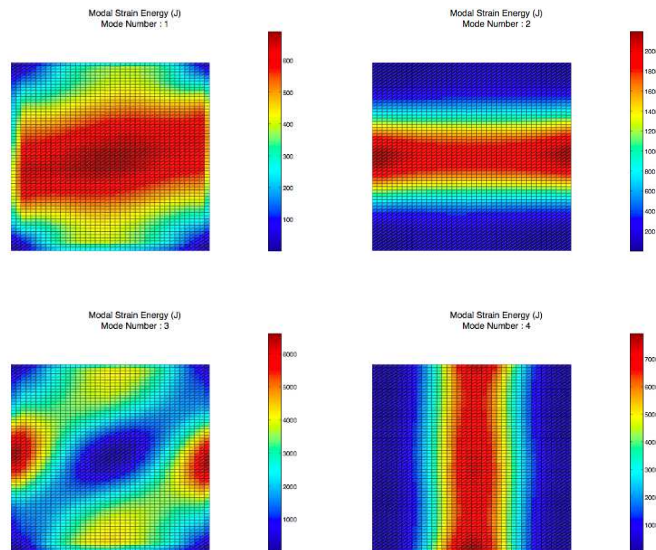


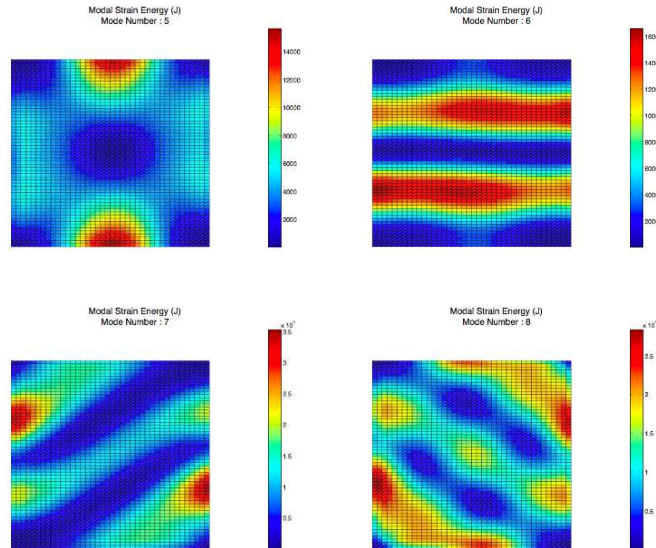
**Figure 8.** Déformées modales numériques de la plaque composite nue.

Le modèle EF validé est maintenant utilisé pour choisir la position d'un patch piézocéramique sur la base de la méthode classique d'analyse des EDM (Figure 10). Le patch doit être collé sur la surface où l'énergie de déformation atteint son maximum. Cela s'est avéré être le centre de la plaque pour les 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> modes ; les modes 7 et 8 sont prévus faiblement couplés et les modes 3, 5 et 6 sont découplés.



**Figure 9.** Matrice de MAC des modes mesurés et calculés de la plaque nue.





**Figure 10.** Cartographies des énergies de déformation des huit premiers modes de la plaque composite nue

#### 4 Simulations et essais sur la plaque instrumentée

Cette section a pour but de caractériser expérimentalement et numériquement le couplage effectif de la plaque composite instrumentée à l'aide de la formule classique [3] ; les résultats obtenus servent de références à ceux obtenus par la formule approchée [15] lorsqu'elle est utilisée de manière classique avec le CCEM matériel transverse  $k_{31}$  [1] et alternative avec le nouveau CCEM  $k_{3D}$  [9].

##### 4.1 Simulations par éléments finis de la plaque instrumentée

La plaque composite instrumentée avec un patch PZT PIC255 centré, de dimensions  $50 \times 25 \times 0,3 \text{ mm}^3$  et dont les propriétés sont rappelées de (Chevallier et al, 2008) dans l'annexe B, est simulée numériquement par EF 3D à 20 noeuds dans Abaqus® ; l'élément multicouche élastique (C3D20) et l'élément solide piézoélectrique (C3D20E) sont utilisés, respectivement, pour la plaque et le patch. Le maillage EF a 28280 noeuds et 4200 éléments (cf. Figure 7, droite).

Dans le but de caractériser numériquement le CCEM effectif de la plaque instrumentée, des analyses en vibrations libres avec le patch en conditions de CC et CO sont effectuées ; les fréquences résultantes sont indiquées dans le Tableau 3. Le

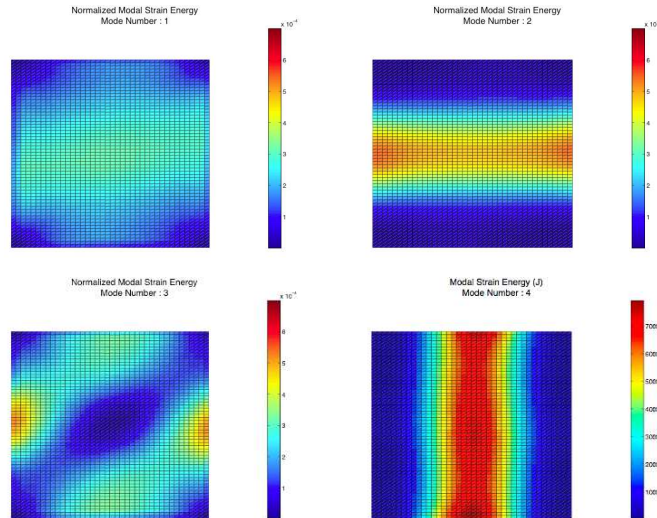
CCEM effectif modal est ensuite *post-traité* à partir de ces fréquences à l'aide de la formule [3] et présenté dans le Tableau 3.

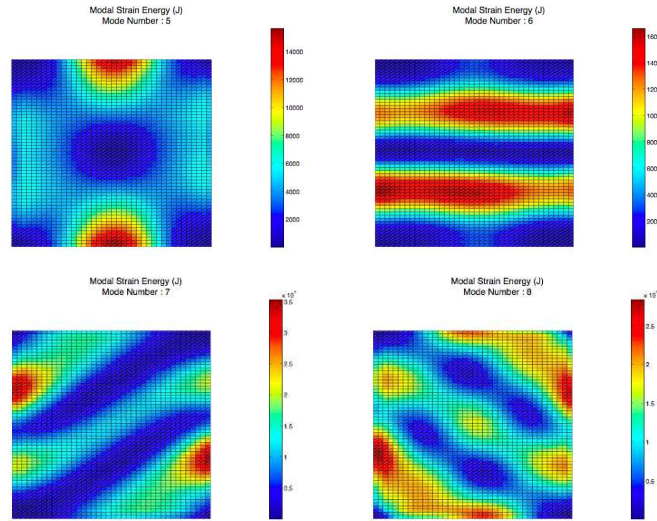
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^c$ (Hz)	239,21	307,32	561,25	604,7 4	743,5 7	866,0 7	1096,4	1178,5
$f^o$ (Hz)	239,23	307,49	561,27	606,0 1	743,5 7	866,0 8	1096,9	1180,8
$K^2$ (%)	0,017	0,111	0,007	0,419	0	0,002	0,091	0,389
K (%)	1,293	3,325	0,844	6,471	0	0,481	3,019	6,238

**Tableau 3.** Fréquences propres CC et CO numériques et CCEM résultants.

Le Tableau 3 montre que les résultats obtenus ne sont pas tout à fait conforme à ce que pouvait laisser espérer l'analyse précédente des EDM ; notamment, le *mode 1* est *peu couplé* et le *mode 8* a un *couplage important*. Pour expliquer ces différences entre les deux types d'analyse on montre que les EDM sont très étroitement liées au choix de la normalisation du mode propre. En conséquence, il convient de normer l'EDM par rapport à celle globale du mode

$$W_{normée} = \frac{W_{def}}{\omega_{cc}^2} \quad [18]$$





**Figure 11.** Cartographies des énergies de déformation normées ([18]) des huit premiers modes de la plaque composite instrumentée.

Cette manipulation permet de se rapprocher de la définition [3] ; ses résultats, montrés dans la Figure 11, sont maintenant plus conformes aux CCEM expérimentaux ; en particulier, la distribution de l'EDM du 1<sup>er</sup> mode le prédit peu couplé et celle du mode 8 le montre très couplé.

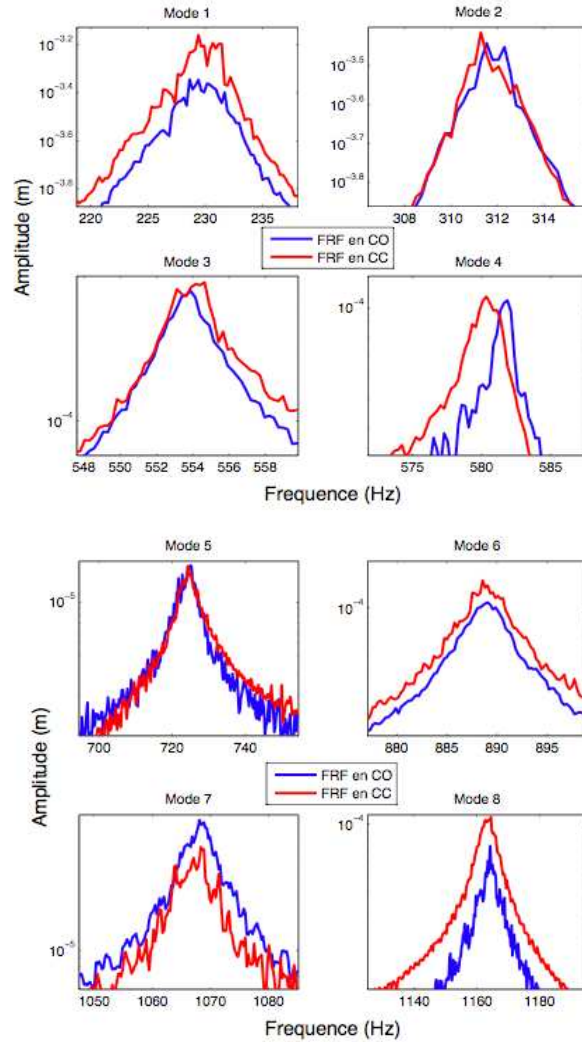
#### 4.2 Essais expérimentaux sur la plaque instrumentée

Les mesures du CCEM effectif de la plaque instrumentée sont effectuées en mesurant les fréquences en CO et en CC sur les FRF. Ces dernières sont obtenues par un essai avec une excitation au marteau de choc et une mesure au vélocimètre laser. Elles sont représentées sur la Figures 12 pour chaque mode. Un relevé de la fréquence correspondant à chaque condition aux limites électriques donne les valeurs résumées dans le Tableau 4.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^c$ (Hz)	219,6	311,3	553,8	580,6	725	888,8	1067	1161,5
$f^o$ (Hz)	219,6	311,5	553,8	581,8	725	888,8	1067,3	1164
$K^2$ (%)	0	0,128	0	0,412	0	0	0,056	0,429
K (%)	0	3,583	0	6,419	0	0	2,371	6,551

**Tableau 4.** Fréquences propres CC et OC mesurées et CCEM résultants.





**Figure 12.** *FRF en CO et CC de la plaque instrumentée.*

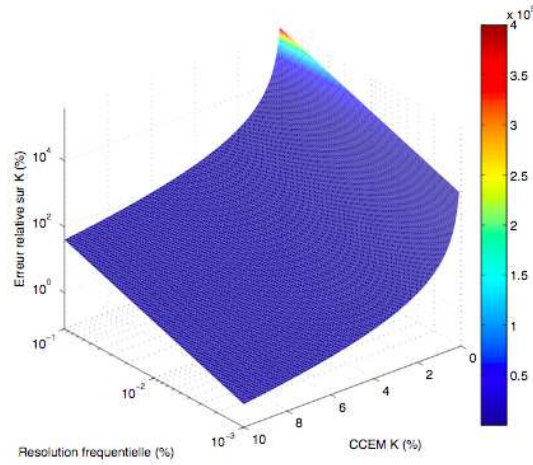
Les Tableau 3 et 4 montrent que les valeurs du CCEM effectif obtenues numériquement et expérimentalement sont très proches pour les modes 2, 4, 7 et 8 ; les autres modes sont trop peu couplés pour que ce couplage soit détectable expérimentalement. On montre en effet que l'incertitude de mesure sur le coefficient de couplage dépend de la résolution fréquentielle de l'essai. Le calcul de cette erreur consiste à différencier le CCEM [3] par rapport aux fréquences CC et CO

$$\left| dK_i^2 \right| < \left| \frac{\partial K_i^2}{\partial \omega_i^{oc}} \right| d\omega_i^{oc} + \left| \frac{\partial K_i^2}{\partial \omega_i^{sc}} \right| d\omega_i^{sc} \quad [19]$$

Pour obtenir l'erreur relative, la relation précédente est divisée par l'expression du couplage. En considérant, que la résolution fréquentielle est la même en circuit ouvert et en circuit fermé, on obtient la relation suivante :

$$\left| \frac{dK_i^2}{K_i^2} \right| \approx \left| \frac{2}{K_i^2} \left( \frac{d\omega_i^{oc}}{\omega_i^{oc}} - \frac{d\omega_i^{sc}}{\omega_i^{sc}} \right) \right| < \frac{4}{K_i^2} \frac{d\omega_i}{\omega_i} \quad [20]$$

Cette expression est représentée dans la Figure 13.



**Figure 13.** Erreur relative sur la détermination du CCEM en fonction de ce dernier et de la résolution fréquentielle.

A partir de la relation [20], deux constats s'imposent : d'abord, l'erreur relative est directement proportionnelle à la résolution fréquentielle  $d\omega$  ; ensuite l'erreur est inversement proportionnelle à la valeur du coefficient de couplage lui-même. Or il est impossible d'augmenter indéfiniment la résolution fréquentielle. Les limites proviennent de l'environnement expérimental : bruit de mesure, limite du matériel d'acquisition, temps d'acquisition. La méthode qui consiste à évaluer les fréquences en CC et en CO se limite donc en expérimentation aux forts coefficients de couplage. Il est possible de réduire l'incertitude de mesure en travaillant à partir des fonctions de transfert électrique mesurée à l'impédance-mètre. Dans ce cas, les valeurs obtenues sont moins bruitées.



La formule [15] est maintenant utilisée avec les CCEM transverse [1] et 3D [9] pour approcher, à partir des fréquences de la plaque nue (Tableau 1) et en CC (Tableau 4), le CCEM effectif de la plaque instrumentée. Du Tableau 5, résumant les résultats correspondants on note que la plus part des fréquences expérimentales en CC sont inférieures à celles de la plaque nue ; cela conduit donc à un carré du CCEM négatif, ce qui n'est pas réaliste. Seuls les modes 2 et 5 ont conduit à un résultat cohérent mais pas concluant au sujet de la comparaison des approximations du CCEM avec la formule [15] très populaire avec le CCEM matériel transverse et alternativement avec le nouveau CCEM 3D [9]. Ce dernier fourni un résultat plus proche de l'expérience pour le 2<sup>ème</sup> mode ; la situation s'inverse pour le mode 5.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
$f$ (Hz) (Tableau 1)	229,3	310,9	554,6	581	724,7	889,1	1068,4	1163,7
$f^{cc}$ (Hz) (Tab. 4)	219,6	311,3	553,8	580,6	725	888,8	1067	1161,5
[15], $K_{31}^2$ (%)	-	0,036	-	-	0,012	-	-	-
[15], $K_{3D}^2$ (%)	-	0,303	-	-	0,097	-	-	-

**Tableau 5.** *Evaluations expérimentales approchées du CCEM effectif modal.*

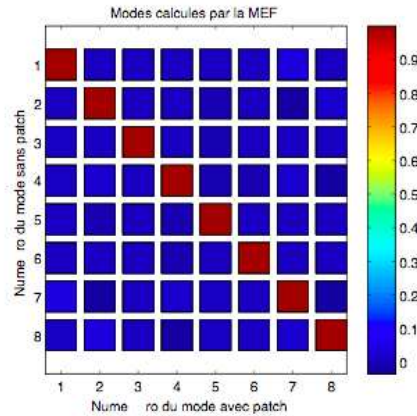
Si maintenant on fait cette comparaison à partir des résultats numériques des Tableaux 1 et 3, on obtient les résultats suivant du Tableau 6.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
$f$ (Hz) (Tab 1)	235,3	319,6	569,8	595,3	741,7	913,3	1098,3	1198,5
$f^{cc}$ (Hz) (Tab 3)	239,2 1	307,32	561,2 5	604,7 4	743,5 7	866,0 7	1096,4	1178,5
[15] $K_{31}^2$ (%)	0,453	-	-	0,432	0,070	-	-	-
[15] $K_{3D}^2$ (%)	3,820	-	-	3,649	0,592	-	-	-

**Tableau 6.** *Evaluations numériques approchées du CCEM effectif modal.*

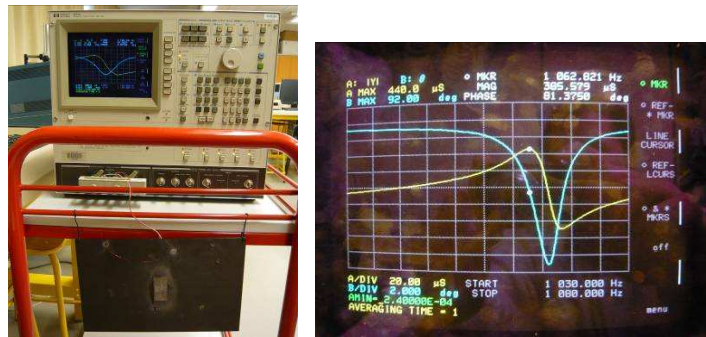
Du Tableau 6, on note que la plus part des fréquences numériques en CC sont inférieures à celles de la plaque nue ; cela conduit donc à un carré du CCEM négatif, ce qui n'est pas réaliste. Ici, seuls les modes 1, 4 et 5 ont conduit à un résultat cohérent ; cependant, aucune des approximations du CCEM avec la formule [15] et le CCEM matériel transverse ou le nouveau CCEM 3D [9] n'est satisfaisante ; en particulier, ce dernier surestime énormément le CCEM de référence (Tableau 3).

De ces deux comparaisons, on peut conclure que la formule populaire [15] n'est pas satisfaisante pour l'évaluation du CCEM des structures composites ; ceci est peut être dû notamment à l'hétérogénéité des champs dans le composite alors que cette formule les suppose uniformes. Cette formule suppose aussi que les déformées modales de la structure nue et instrumentée sont identiques ; pour la présente plaque, cette hypothèse semble être valide puisque la matrice de MAC de ces deux familles de mode vaut 1 sur sa diagonale principale (Figure 14).



**Figure 14.** Matrice de MAC des modes mesurés et calculés de la plaque nue.

De point de vue, expérimental, le CCEM effectif peut être aussi déterminée à partir des pôles et zéros d'une courbe d'admittance électrique mesurée par un analyseur d'impédance (Figure 15) ; cependant ce dernier est lourd, encombrant et coûteux ; il n'est donc pas disponible dans tous les laboratoires.

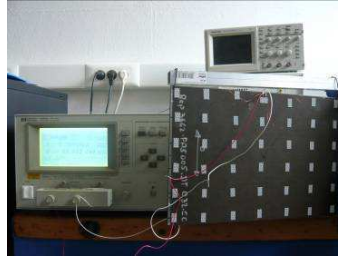


**Figure 15.** Analyseur d'impédance et l'admittance centrée sur un mode.

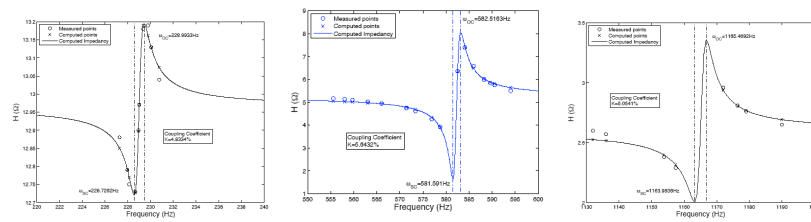
Une alternative à l'analyseur d'impédance consiste à utiliser un LCR-mètre (Figure 16) qui fournit des mesures ponctuelles et nécessite de tracer la courbe d'admittance électrique à l'aide de l'expression paramétrique suivante qui fait intervenir le gain ( $G$ ) du montage et sa capacité ( $C$ ) ainsi qu'un pôle et un zéro qui ne sont autres que la pulsation au carré en CO et en CC, respectivement

$$H = \frac{G}{jC\omega} \frac{\omega^2 - \omega_{cc}^2}{\omega^2 - \omega_{co}^2} \quad [21]$$

La fonction [21] a été tracée pour les modes 1, 4 et 8 et les résultats sont fournis graphiquement sur la Figure 17 ; les CCEM effectifs,  $K$  (%), calculés sont de 4,8 pour le 1<sup>er</sup> mode, 5,6 pour le 4<sup>ème</sup> et 5,1 pour le 8<sup>ème</sup> mode ; contrairement à la première valeur, les deux dernières sont jugées plutôt satisfaisantes.



**Figure 16.** LCR-mètre (gauche) utilisé pour l'évaluation ponctuelle du CCEM de la plaque instrumentée.



**Figure 17.** Les courbes d'impédance électrique par [21] des modes 1, 4 et 8 (respectivement de gauche à droite) de la plaque instrumentée.

## 5 Conclusions et perspectives

Une plaque composite a été étudiée expérimentalement et numériquement, avec et sans patch piézo-céramique PZT PIC255 centré, pour l'évaluation du CCEM effectif. Les expériences de la plaque seule ont été utilisées pour valider le modèle EF 3D qui a servi à choisir la position du patch et pour la conception de la

configuration adaptative. Cette dernière a été ensuite analysée expérimentalement en CC et CO. Les fréquences obtenues ont été post-traitées afin d'obtenir le CCEM effectif modal. Ce dernier dépend de la position du patch. La méthode utilisée pour déterminer le bon placement du patch est basée sur les énergies de déformations modales. Elle a conduit à une position centrale pour privilégier le couplage des modes 1, 2 et 4. Cependant les modes les plus couplés expérimentalement et par EF sont les modes 4 et 8. L'étude de l'énergie de déformation modale s'est avérée être une méthode fiable à condition de normer le résultat. Par ailleurs, il est très difficile de mesurer les coefficients de couplage par des analyses vibratoires expérimentales classiques. En effet, la valeur de ces coefficients dépend largement de la résolution fréquentielle mais aussi de la valeur du coefficient de couplage lui même.

La perspective immédiate de ces travaux est d'enrichir la méthode de placement de patch par une procédure d'optimisation algorithmique. D'autre part, la mesure des coefficients de couplage faibles reste à améliorer. On peut se baser par exemple sur l'usage de la formule [14] et le calcul de l'énergie électrique via les mesures de tension et de courant d'autre part.

## Bibliographie

- Al-Ajmi M. A., Benjeddou A., « Damage indication in smart structures using modal effective electromechanical coupling coefficients », *Smart Materials and Structures*, vol. 17 (035023), n° 3, 2008, 15 pages.
- Araujo A., Mota Soares C. M., Friedmann H., Röhner J., Henkel F.-O., « Optimal location of piezoelectric patches and identification of material properties in laminated composite structures », *Proceedings of the 4<sup>th</sup> ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials SMART'09*, Porto, 13-15 July 2009.
- Avellaneda M., Olson T., « Effective medium theories and effective electromechanical coupling factors for piezoelectric composites », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 4, 1993, p. 82-88.
- Becker J., Fein O., Maess M., Gaul L., « Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping », *Computers and Structures*, vol. 84, 2006, p. 2340-2350.
- Benjeddou A., « Approximate evaluation of the modal effective electromechanical coupling coefficient », *Multifunctional Material Structures and Systems*, B. Dattaguru, S. Gopalakrishnan (Editors), Springer-Verlag, 2009a.
- Benjeddou, A., « New insights in piezoelectric free-vibrations simplified modeling and analyses », *Smart Structures and Systems*, vol. 5, n° 6, 2009b.
- Benjeddou A., Ghorbel S., Chevallier G., « On 2D plane strain/stress vibration analysis of piezoelectric structures », *Third International Congress on Design and Modelling of Mechanical Systems CMSM'09*, Hammamet, 16-18 mars 2009a.

- Benjeddou A., Ghorbel S., Chevallier G., « On approximate evaluations of the modal effective electromechanical coupling coefficient », *9ème Congrès Marocain de Mécanique CMM'09*, Marrakech, 21-24 avril 2009b.
- Benjeddou A., Ranger-Vieillard J.-A., « Use of shunted shear-mode piezoceramics for structural vibration passive damping », *Computers and Structures*, vol. 84, n°22-23, 2006, p. 1415-1425.
- Chevallier G., Ghorbel S., Benjeddou A., « A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures », *Smart Materials and Structures*, vol. 17 (065007), n°6, 2008, 11 pages.
- Chevallier G., Ghorbel S., Benjeddou A., « Piezoceramic shunted damping concept: testing, modelling and correlation », *Mécanique et Industries*, 2009, à paraître.
- Deü J.-F., Benjeddou A., « Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic layers », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, n° 7, 2005, p. 2059-2088.
- Fein O. M., « A model for piezo-resistive damping of two-dimensional structures », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, 2008, p. 865-880.
- Ghorbel S., « Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations, simulations et corrélations », Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2009.
- Hagood N., Flotow A. V., « Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 146, 1991, p.243-268.
- Hollkamp J. J., Gordon R. W., « An experimental comparison of piezoelectric and constrained layer damping », *Smart Materials and Structures*, vol. 5, 1996, p. 715-722.
- IEEE Inc., « *IEEE Standards on piezoelectricity* », ANS/IEEE Std 176-1987, 1988.
- Kumar K. R., Narayanan S., « The optimal location of piezoelectric actuators and sensors for vibration control of plates », *Smart Materials and Structures*, vol. 16, 2007, p. 2680-2691.
- Moon S. H., Kim S. J., « Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method », *AIAA Journal*, vol. 39, n° 11, 2001, p. 2042-2050.
- Ranger J., « Amortissement passif des vibrations par patchs piézocéramiques shuntés », Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2007.
- Saravanas D., « Damped vibration of composite plates with passive piezoelectric-resistor elements », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 221, n° 5, 1999, p. 867-885.
- Tanimoto T., « A new vibration damping CFRP material with interlayers of dispersed piezoelectric ceramic particles », *Composites Science and Technology*, vol. 67, 2007, p. 213-221.
- Thornburgh R.P., Chattopadhyay A., Ghoshal A., « Transient vibration of smart structures using a coupled piezoelectric-mechanical theory », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 274, 2004, p. 53-72.

Trindade M., Benjeddou A., « Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptative structures », *Mechanics of advanced Materials and Structures*, vol. 16, n° 3, 2008, p. 210-223.

## Annexe A : CCEM tensoriel

Les matrices des lois de comportement piézoélectrique *orthotrope* de la forme  $d$  sont

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [\epsilon^T] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} \quad [A1]$$

$$[S^E] = [C^E]^{-1} ; [C^E] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^E \quad [A2]$$

En substituant ces matrices dans [8], on déduit le CCEM tensoriel

$$[k^2] = \begin{bmatrix} k_{15}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{24}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{3D}^2 \end{bmatrix} \quad [A3]$$

Avec,  $k_{15}^2$  et  $k_{24}^2$  ayant les mêmes définitions qu'en [1] et  $k_{3D}^2$  donné par

$$k_{3D}^2 = (\epsilon_{33}^T)^{-1} [C_{11}^E d_{31}^2 + C_{22}^E d_{32}^2 + 2d_{31} d_{32} C_{12}^E + 2C_{13}^E d_{31} d_{33} + 2C_{23}^E d_{32} d_{33} + C_{33}^E d_{33}^2] \quad [A4]$$

Cette relation se réduit à celle donnée en [9] après avoir pris en compte les relations d'*isotropie transverse* dans le plan 1-2 d'un piézocéramique

$$C_{11}^E = C_{22}^E, C_{13}^E = C_{23}^E, C_{44}^E = C_{55}^E, C_{66}^E = \frac{1}{2}(C_{22}^E - C_{12}^E), d_{31} = d_{32}, d_{15} = d_{24}, \epsilon_{11}^T = \epsilon_{22}^T \quad [A5]$$

Dans ce cas,  $k_{15}^2 = k_{24}^2$  ; il ne reste plus donc que deux CCEM matériels :  $k_{15}$  et  $k_{3D}$ .

### Annexe B : Propriétés matérielles du PZT PIC255

Les propriétés utiles extraites des données fournies par le fabricant du PZT PIC255 sont

- masse volumique :  $\rho=7800 \text{ Kg/m}^3$
- souplesses élastiques :  $s_{11}^E=16,1 \text{ e}^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ ,  $s_{33}^E=20,7 \text{ e}^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$
- constantes piézoélectrique de déformation:  $d_{31}=-180 \text{ e}^{-12} \text{ C/N}$ ,  $d_{33}=400 \text{ e}^{-12} \text{ C/N}$ ,  $d_{15}=550 \text{ e}^{-12} \text{ C/N}$
- constantes piézoélectriques relatives :  $\epsilon_{r11}^T = 1650$ ,  $\epsilon_{r33}^T = 1750$  ( $\rightarrow \epsilon_{11}^T = 14,6 \text{ nF/m}$ ,  $\epsilon_{33}^T = 15,5 \text{ nF/m}$ )
- CCEM matériels :  $k_{31}=0,35$  ;  $k_{33}=0,69$  ;  $k_{15}=0,66$  ;  $k_p=0,62$

Ces données partielles peuvent être complétées (Chevallier et al, 2008) pour obtenir la matrice des raideurs élastique suivante en notation standard (IEEE, 1988)

$$[C^E] = \begin{bmatrix} 105.2 & 58.3 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 58.3 & 105.2 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 55.4 & 55.4 & 85.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23.5 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad [\text{A6}]$$

De ces propriétés et de la relation [9], on déduit  $k_{3D}^2 = 0,54$  et  $k_{3D}=0,74$ .

# Piezoceramic shunted damping concept: testing, modelling and correlation

GAËL CHEVALLIER<sup>a</sup>, SALMA GHORBEL AND AYECH BENJEDDOU

Institut Supérieur de Mécanique de Paris, LISMMA, Structures, 3 rue Fernand Hainault, 93407 Saint-Ouen Cedex, France

Received 6 October 2008, Accepted 12 May 2009

**Abstract** – New laboratory tests are presented for the experimental evaluation and assessment of the *piezoceramic shunted damping* (PSD) concept for cantilever Aluminium thin (*long*) beams bonded *symmetrically* on their upper/lower surfaces with *single* pairs of *small* piezoceramic patches. Following these tests outcome, the PSD efficiency measure is proposed to be the so-called modal effective *electromechanical coupling coefficient*, which is post-processed from free-vibrations analyses under *short-circuit* and *open-circuit* electrodes of the patches. For this purpose, the tests are numerically modelled, analysed, and *correlated* using ABAQUS<sup>®</sup> commercial finite element (FE) code. Good tests/models correlations were reached after FE models *electromechanical updating*. This is attributed to the refined FE models in the sense that they have considered realistic and desirable features such as, *electrodes equipotentiality*, piezoceramic patches *poling orientations* (same/opposite), and the corresponding (parallel/series) *electric wiring* (connections).

**Key words:** Piezoceramic shunted damping / experimental tests / finite element analysis / electrodes equipotentiality / piezoceramic poling orientation / patches electric wiring / models electromechanical updating

**Résumé** – **Concept d’amortissement piézoélectrique shunté : expérimentation, modélisation et corrélation.** De nouveaux tests de laboratoire sont présentés pour l’évaluation expérimentale du concept d’amortissement *piézocéramique shunté* (APS) pour des poutres cantilever minces (*longues*) en Aluminium sur lesquelles sont collées symétriquement sur leurs surfaces supérieures/inférieures des paires *uniques* de *petits* patches piézocéramiques. Suite aux résultats de ces tests, le *coefficient de couplage électromécanique* effectif modal, obtenu par post-traitement à partir d’analyses vibratoires avec des électrodes de patches en court-circuit et circuit ouvert, est proposé comme mesure de l’efficacité de l’APS. Pour cela, les tests sont numériquement modélisés, analysés et *corrélés* à l’aide du code commercial d’éléments finis (EF) ABAQUS<sup>®</sup>. De bonnes corrélations modèles/essais sont obtenues après le *recalage électromécanique* des modèles. Celles-ci sont attribuées aux modèles EF raffinés dans le sens où ils ont considéré des aspects réalistes et désirables tels que l’*équipotentialité* des électrodes, les *orientations* (mêmes/opposées) des patches piézocéramiques, et les *connexions* (parallèles/séries) électriques correspondantes.

**Mots clés :** Amortissement piézocéramique shunté / tests expérimentaux / analyse par éléments finis / équipotentialité des électrodes / orientation des polarisations piézoélectriques / connexions électriques de patches / recalage électromécanique de modèles

## 1 Introduction and state of the art

The *piezoceramic shunted damping* (PSD) concept relies on the conversion, via a piezoceramic transducer bonded to the vibrating structure, of the mechanical energy to an electric energy that is dissipated through the resistive component of a shunting electronic circuit [1]. In analogy with the intrinsic *electromechanical coupling*

*coefficient* (EMCC) that measures the energy conversion efficiency of a piezoceramic material [2–5], the *generalized* (or effective) EMCC parameter was introduced [6–9] to measure the patches energy conversion when they are bonded to, or integrated in, a host structure [10,11]. Moreover, the added damping was shown to be proportional to this parameter [12]. Hence, the latter can be used as a PSD performance indicator. The shunting circuit can be resistive (constituted by a simple resistance), resonant (or inductive, containing at least a resistance and

<sup>a</sup> Corresponding author:  
[gael.chevallier@supmeca.fr](mailto:gael.chevallier@supmeca.fr)



### Nomenclature

$A$	Patch electrode area ( $\text{m}^2$ )
$C_p^S$	Capacitance at constant strain of a patch (nF)
$C_p^T$	Capacitance at constant stress of a patch (nF)
$f_{OC}$	Open-circuit natural frequency (Hz)
$f_{SC}$	Short-circuit natural frequency (Hz)
$h$	Thickness of a patch (m)
$k_{31}$	Material transverse electromechanical coupling coefficient
$K$	Effective electromechanical coupling coefficient
$R_{opt}$	Optimal electric resistance ( $\Omega$ )
$\epsilon_{33}^S$	Transverse dielectric permittivity at constant strain ( $\text{F.m}^{-1}$ )
$\epsilon_{33}^T$	Transverse dielectric permittivity at constant stress ( $\text{F.m}^{-1}$ )
$\epsilon_0$	Dielectric permittivity in void ( $=8.854 \text{ pF.m}^{-1}$ )
$\omega_{SC}$	Short-circuit radial frequency ( $\text{rad.s}^{-1}$ )
$\bar{\omega}$	Nominal radial frequency ( $\text{rad.s}^{-1}$ )
$\xi_{add}^{R,RL}$	Added resistive (R), resonant (RL) shunted damping
$\xi_{SC,OC}$	Modal damping ratio for short-circuit/open-circuit patches electrodes
$\xi_{opt}$	Total damping ratio for optimal shunt resistance
List of acronyms	
2D	Two-dimensional,
3D	Three-dimensional
CFRP	Carbon fibre reinforced plastics
DOF	Degrees of freedom
EBC	Electric boundary conditions
EMCC	Electromechanical coupling coefficient
EP	Equipotential
FE	Finite element
FRF	Frequency response function
MBC	Mechanical boundary conditions
MSE	Modal strain energy
NIDAQ	National instruments data acquisition
OC	Open circuit
OP	Opposite poling
PSD	Piezoceramic shunted damping
PW	Parallel wiring
PZT	Lead Zirconate Titanate
SC	Short circuit
SP	Same poling
SW	Series wiring
UMAT	User material

an inductance in series or parallel) and capacitive (containing a simple capacitance with a positive or negative value) [9, 13]. Switching between *open-circuit* (OC) and *short-circuit* (SC) electric states, or between OC and resistive or resonant shunted states, can also reduce vibrations [14]. It is worthy to mention the analogy between the resistive PSD and viscoelastic damping, and between the resonant PSD and the proof mass damping.

During the last three decades, the PSD concept was the focus of intense researches [13–15]. Its experimental evaluation and assessment have been conducted on simple structures, like bars, beams, plates and rings. By far, the cantilever beam with symmetrically (co-localised) bonded piezoceramic patches was the most experimented

structure using various shunting circuits going from the simple resistor circuit [6] up to complex feedback [15] one. In this case of multiple patches, the poling (polarization) directions and the electric connections (wiring) of their electrodes affect the structure deformation state. Hence, when the patches have the *same poling* (SP) directions, they require electric *parallel wiring* (PW); while when they have *opposite poling* (OP) directions, they require electric *series wiring* (SW) [16]. In both cases, this produces opposite electric fields in the patches so that when the bottom patch expands, the upper one contracts creating an upward pure bending of the cantilever beam.

Early PSD experimental evaluation and assessment tests have concerned a cantilever Aluminium beam on

which two SP piezoceramic pairs were surface-bonded with a very thin conducting epoxy [6]. The beam was grounded and the positive electrodes were attached to the exterior electroded surfaces of the piezoceramic pairs. Resistive and resonant PSD tests were modelled and analysed using a single-mode mixed *mechanical impedance/Ritz* method [17]. The same electric wiring has been considered in [18] but for six piezoceramic pairs that were individually wired in parallel for multimode resonant PSD and a viscous damping was taken into account in the mechanical impedance formulation. The latter has been combined to the *finite element* (FE) method [8,12], a Navier *analytical solution* [19] and a shunt tuning method based on the measured *electrical impedance* [20] rather than *pole placement* and *transfer function* methods proposed in [6] and used in [7,8,12,17–19].

A *modal strain energy* (MSE) approach has been proposed and validated [21] on similar experiments as above. Here, it was clearly indicated that the patches have SP and PW. It was shown that the resistive PSD induced damping can be written as the product of the effective fraction of MSE stored in the piezoceramic material, an effective piezoceramic material loss factor and a frequency shaping factor. The first parameter is determined via a FE model, the second one is closely related to the material EMCC and the third one results from the shunting circuit dynamics. The proposed anelastic relaxation damping was later implemented as an integral hereditary material law in an ABAQUS® UMAT subroutine [22].

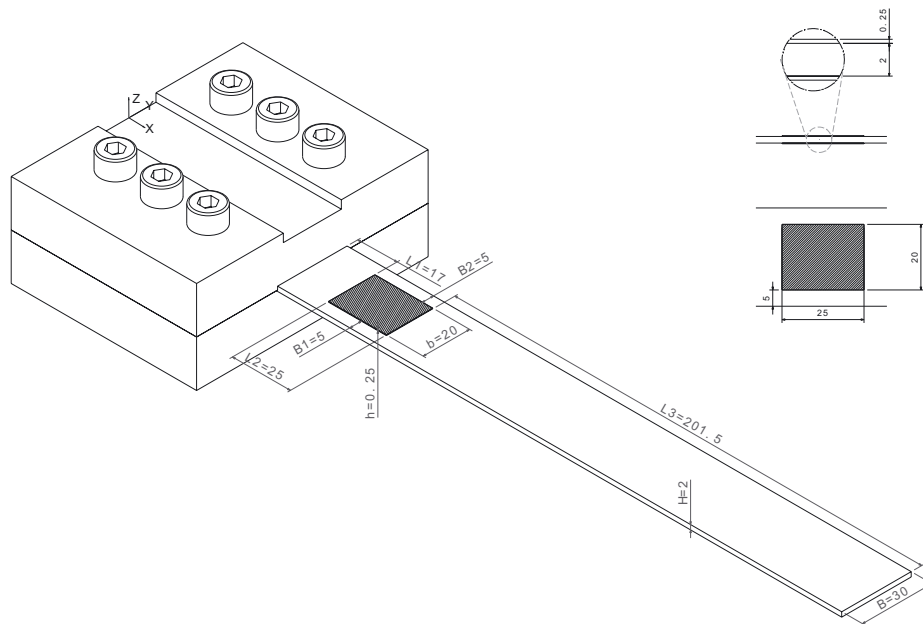
Few experiments have considered OP shunted piezoceramics. Hence, early in this decade, four pairs with *inward* OP piezoceramics bonded symmetrically on cantilever beams have been experimented for variable hybrid (shunted/active) damping based on control power requirement [23]. Recently, resistive PSD using *outward* OP piezoceramics bonded symmetrically with a conductive contact to a quasi-isotropic CFRP laminated cantilever beam were tested [24]. Here, the outside piezoceramics surfaces were coated with a conductive silver paint to form the positive electrodes across which the shunting resistance was connected. The contact was conductive but no information was given on the beam grounding. A similar configuration has been considered also recently for coupled-field analysis of a piezoelectric bimorph disc in a direct-write process [25]. Here, an *inward* OP bimorph piezoceramic beam without interface electrodes was shown to bend upward under series voltage conditions; this is the so-called series bimorph [16]. The modelling and analysis were made using ANSYS® PLANE223 two-dimensional (2D) piezoelectric FE.

Comparison of both SP and OP PSD configurations has been made only recently for multimode vibration reduction of a CD-ROM drive base [26]. The *admittance* of the piezoelectric structure, calculated using ANSYS® SOLID5 piezoelectric FE, was proposed as a *PSD performance index*. It was found that the magnitude of the admittance in case of OP is much smaller than that of the SP. It was concluded then that the vibration suppression of the piezoelectric shunt is small in case of OP. In the

case of SP, the admittance obtained by numerical simulation correlates well with that obtained by experiments. These results were contradicted by the tests conducted recently [27] which gave similar experimental performance for OP and SP. It is thought then that the OP patches were not suitably wired and simulated in [26]. In [27], the SP and OP patches were connected in PW and SW, respectively, which is consistent with the PW for SP in [21] and the SW for OP in [25] as well as with parallel and series bimorphs definitions [16]. It is then necessary to indicate the poling directions and electric wiring for PSD experiments. Hence, the absence of these indications, as in [28,29], renders the tests and their results useless for reference.

Use of commercial FE softwares for the modelling and analysis of PSD finds increasing interest. First, a UMAT ABAQUS® subroutine has been exploited as discussed above [22]; then, 2D 8-noded (PLANE223) [25] and three-dimensional (3D) 8-noded (SOLID5) [26,30] piezoelectric FE of ANSYS® have been used. In [30], the electronic circuit was modelled using CIRCUIT94 specific element. Super element ANSYS® capability has been used, in [31], for modelling the piezoelectric patches assembled in MATLAB® to the host elastic structure FE model. The electrodes *equipotential* (EP) constraints were considered and model truncations have been implemented for both resistive and resonant shunts. The experimental and FE analyses have shown that the total modal damping equals the sum of the structural (Rayleigh) damping and the damping introduced by the piezoelectric patches. This *damping superposition (additive) property* has been used so that first, the inherent structural modal damping ratios ( $\xi_{OC}$ ) were determined by the  $-3$  dB method for *OC electrodes*; then, the same frequency band was applied so that the total modal damping ( $\xi_{opt}$ ) is determined; next, their difference has been used to quantify the increase in modal damping due to the applied passive electrical network; that is,  $\xi_{add}^{sh} = \xi_{opt} - \xi_{OC}$ . A parameter study has shown that *modal damping ratios are very sensitive to uncertainties of the piezoelectric coupling matrix but not very sensitive to small changes in the optimal resistance*. These results are consistent with obtained experimental ones [27] and theoretical one for the shunt parameter only [32]. Finally, MSC/NASTRAN® software, which has no piezoelectricity modelling capability, has been used to implement PSD [33]. For this purpose, the viscoelastic materials complex models of [34,35] were adapted and combined to the impedance theory [6] for resistive and resonant PSD modelling. Notice that none of above simulations [25,26,30,31] has considered the FE models updating.

This work presents, first, new laboratory tests for the experimental evaluation and assessment of the PSD concept for cantilever Aluminium thin (*long*) beams bonded *symmetrically* on their upper/lower surfaces with *single* pairs of *small* piezoceramic patches. Then, these tests are numerically modelled in 3D, analysed, and *correlated* using the commercial FE code ABAQUS® in order to measure the PSD efficiency via the so-called



**Fig. 1.** Cantilever Aluminium beam with a bonded pair of PIC255 PZT patches (dim. in mm).

modal effective EMCC, which is post-processed from free-vibrations analyses under SC and OC electrodes of the patches. Hence, two cantilever Aluminium beams with *symmetrically bonded* PIC255 piezoceramics (PZT), having either SP or OP, were analysed in free-vibrations for SC and OC electrodes without (w/o) or with EP constraints. The electric connections, representing the experimental PW and SW, were also modelled. To correlate with the experimental tests, the FE models electromechanical updating was also conducted. In contrary to the common practices, as attested by the above state-of-the-art, these tests simulations can then be seen as refined in the sense that they consider the following realistic features:

- SP and OP are modelled using *local coordinates systems*. It is shown that a simpler *alternative technique* consists in using *positive* and *negative* piezoelectric matrices for SP and OP, respectively, when filling the piezoelectric properties data.
- EP physical property was considered using linear *constraints* command for the electrodes electric degrees of freedom (DOF).
- SC and OC electric boundary conditions (EBC) were handled by imposing nil electric potential on the four electrodes for the SC EBC, and by letting the electrodes free of any load for the OC (with or w/o EP) EBC.
- PW and SW of the SP and OP patches configurations, respectively, were handled by adding *electric connections equations* to the EP electrodes.
- The FE models were updated in three ways: first, mechanically, by updating the mechanical boundary conditions (MBC), the experimental clamp, using linear springs which axial stiffness is tuned for each

configuration so that the differences between FE and experimental fundamental SC frequencies are made minimum; then, electrically, by updating the transverse blocked dielectric constant using the measured blocked capacities of the individual patches; finally, electromechanically, by combining the previous two methods.

The original contributions of this work are (i) the experimental PSD performance assessment for both SP and OP bimorph configurations; (ii) the clarification of the electric wiring (connection) of SP and OP configurations; (iii) the electromechanically updated FE modelling with a commercial code of PSD experiments for different polarisations configurations; (iv) the assessment of the influence of the equipotential physical constraint on the modal effective EMCC. This work outcome could be of major interest to practitioners and researchers.

## 2 Piezoceramic shunted damping concept testing

### 2.1 Test articles design and experimental setup

Two test articles were designed and assembled for the experimental evaluation and assessment of the PSD concept. They consist of Aluminium cantilever beams with 0.25 mm-thick PIC255 PZT patches (purchased from PI Ceramics) glued symmetrically with a conductive epoxy adhesive on their top and bottom surfaces near the clamp (Fig. 1) in order to get measurable effective EMCC at least for the first bending mode. Focus is made here on the pure bending modes of the beams which induce expansion and contraction strains on their external faces.

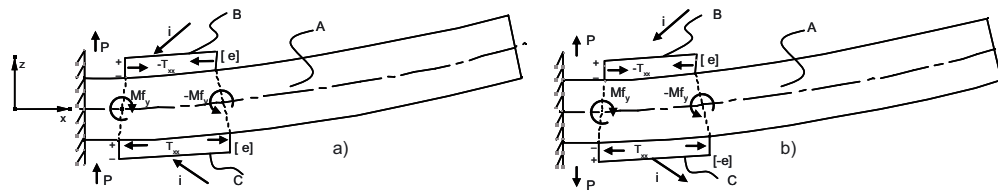


Fig. 2. Piezoceramic patches bonding configurations: (a) SP. (b) OP.

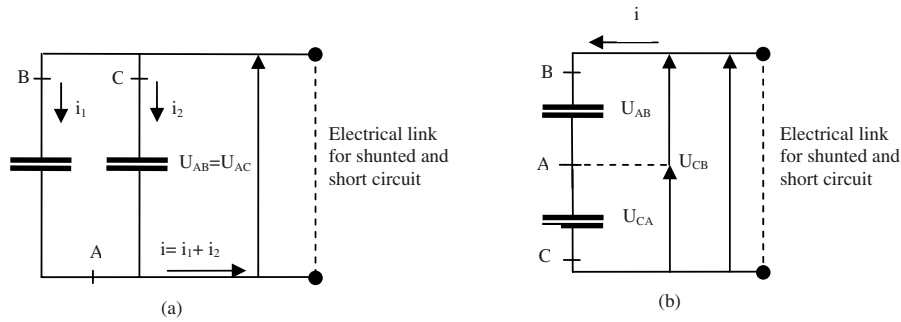


Fig. 3. Electric connections: (a) Parallel wiring (for SP). (b) Series wiring (for OP).

Since the patches are polarized along the thickness direction and work in their extension response, as sketched in Figure 2 for the fundamental mode, this can be reached by bonding them so that they have either positive SP (Fig. 2a) or outward OP (Fig. 2b) directions.

As it is well known, a piezoceramic patch generates electric charges, hence a flowing electric current, when it is deformed. The sign of this current depends on the signs of the imposed strains on the patches as in Figure 2. Hence, above bonding configurations have to be connected electrically in parallel (Fig. 3a) and in series (Fig. 3b), respectively. This leads to respective equivalent capacitance of wired piezoceramic patches of half and twice that of each patch. It is clear from Figure 4 that SP and OP patches have to be PW and SW, respectively; otherwise, no current is flowing in the wired pair and no added PSD can be expected. For better readability, PW and SW patches electric connections acronyms will be used mainly in this testing section, while those of SP and OP patches bonding configurations will be used mainly in the FE modelling section.

The bending modes of the beams are excited with an electromagnetic shaker. The latter is plugged near the beam clamp in order to minimize its mass coupling. Since only the first modes are measured there is no modal coupling between the shaker and the beam. A white noise generator is used to drive the shaker in a [10–1000] Hz frequency range. The acceleration is measured using an electromagnetic sensor located near the beam tip. This position is a good compromise in order to get the largest displacement for the first two bending modes. Both the generator and the sensor are linked to a National Instrument Data Acquisition (NIDAQ) card (Fig. 5) which measures their signals. Using the latter, SC and OC frequency response functions (FRF), for both electrical connections,

are plotted in order to extract the natural frequencies and modal damping ratios. The latter are calculated using the classical –3 dB approach from the FRFs; these were computed using the H1 transfer function after averaging the signals acquired during 400 blocks. To get good EMCC calculation accuracy, the frequency resolution is taken as 0.039 Hz. This value is obtained with the above frequency range and with blocks of 16384 samples. Finally, to evidence the effect of the passive damping induced by the shunted piezoceramics, all the other causes of damping were minimized by using an electromagnetic non contact sensor, a clamp as stiff as possible (a heavy steel mass as in Fig. 1), and specific electric wires, as thin as possible.

## 2.2 Experimental PSD performance evaluation and assessment

Some preliminary tests were first conducted. They consist of measuring, for both series and parallel electrical connections, the bonded patches individual and wired (equivalent) capacitances at constant strain and the open-loop (without shunt) OC and SC modal properties (FRFs, natural frequencies, damping ratios).

Individual and wired bonded patches capacitances (at constant strain) are measured using a multi-meter for a nominal frequency of 100 Hz. The obtained values are compared in Table 1 to the theoretical ones resulting from the expression of the capacitance at constant strain ( $S$ ) in term of that at constant stress ( $T$ ) and material extension EMCC,  $k_{31}$ :

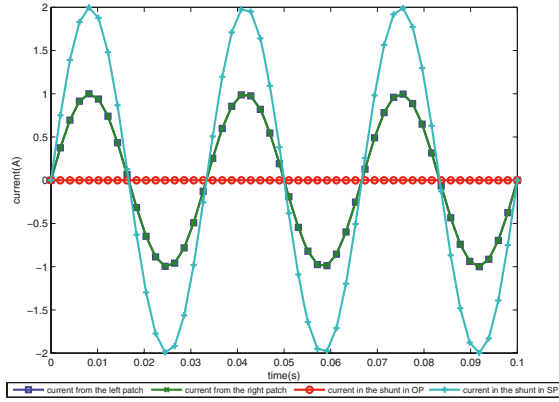
$$C_p^S = C_p^T (1 - k_{31}^2) \quad (1a)$$

with

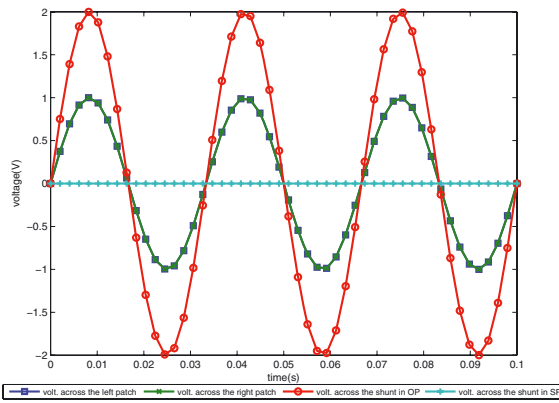
$$C_p^T = \frac{\epsilon_{33}^T A}{h} \quad (1b)$$

**Table 1.** Measured and theoretical blocked capacitances (nF).

Wiring	Side	Measured Individual	Theoretical Individual	Measured Equivalent	Theoretical Equivalent	Relative Difference (%)
Parallel	left	17.9	27.2	36	54.5	33.8
	right	17.6				
Series	left	23	27.2	12	13.6	11.8
	right	23.8				



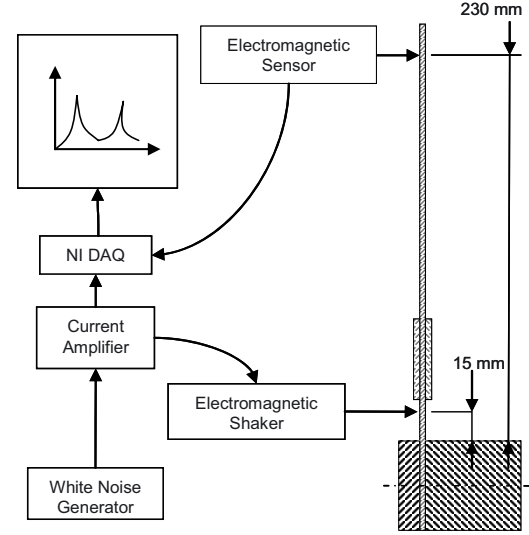
(a)



(b)

**Fig. 4.** Flowing currents (a) and voltages (b) in individual, SP and OP patches.

where  $\epsilon_{33}^T / \epsilon_0 = 1750$  and  $k_{31} = 0.35$  are the PIC255 PZT relative transverse dielectric constant at free stress and EMCC;  $h$  and  $A$  are its thickness and electrode area. The observed relative differences may be due, on one hand, to the quality of the manual gluing procedure of the patches to the beams for both electrical connections; it seems that the series configuration was better experimentally prepared than the parallel one. On the other hand, these deviations may be also due to the fact that the measured capacitance is in fact the *static* one which value lies between those of the free and blocked capacitances.

**Fig. 5.** Experimental setup.

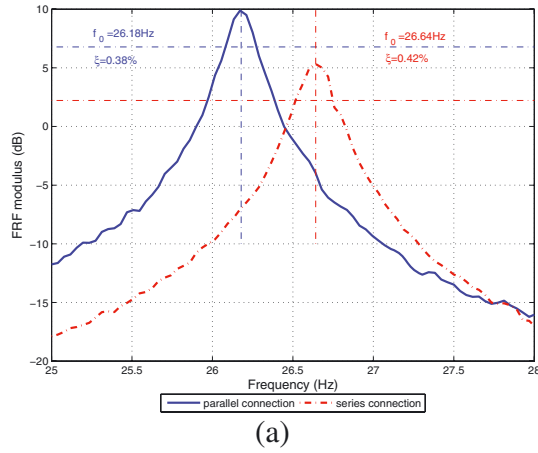
The made error depends mainly on the MSE fraction in the patches [9]. Besides, the dielectric bonding glue may affect the OP configuration capacitance and OC frequency (hence EMCC) measurements more than the SP ones since the beams were not grounded. Nevertheless, the bonding layers capacities were measured and found to be around one hundred times lower than those of the individual patches. No specific measurement difficulties were encountered with the OP configuration.

Measured frequency response functions of the first two bending modes of series and parallel electrical connections with OC electrodes of the patches are shown in Figure 6. The differences ( $<3\%$  for the frequencies) between the two electrical connections can be explained by the geometrical defects and the manual gluing procedure. The equivalent capacitances of both configurations should induce only small differences at this testing stage.

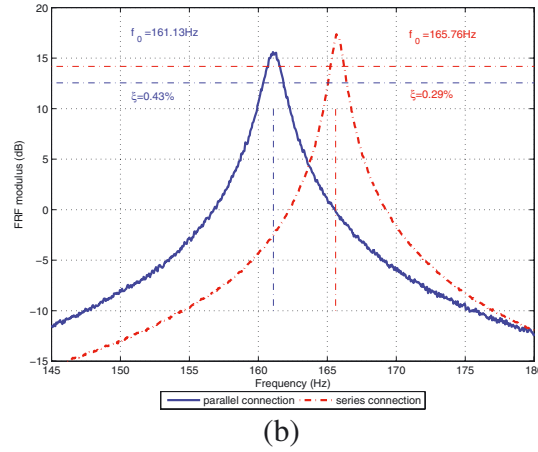
Open-loop series and parallel connections measured SC and OC natural frequencies and damping ratios of the first and second bending modes are given in the corresponding FRFs shown in Figures 7 and 8, respectively. It can be noticed that the open-loop measured damping ratios are rather small and that, due to the experimental conditions, they can not be further reduced.

For the resistive PSD concept experimental evaluation and assessment, the maximum added damping is





(a)



(b)

**Fig. 6.** OC measured FRF of SW and PW configurations: (a) First mode. (b) Second mode.

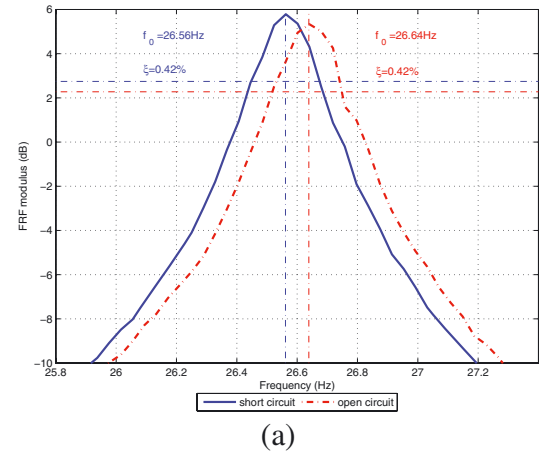
calculated using the measured OC and SC natural frequencies for both SW and PW via this approximate relation [7-9]:

$$\xi_{\text{add}}^R \approx \frac{K^2}{4} \quad (2a)$$

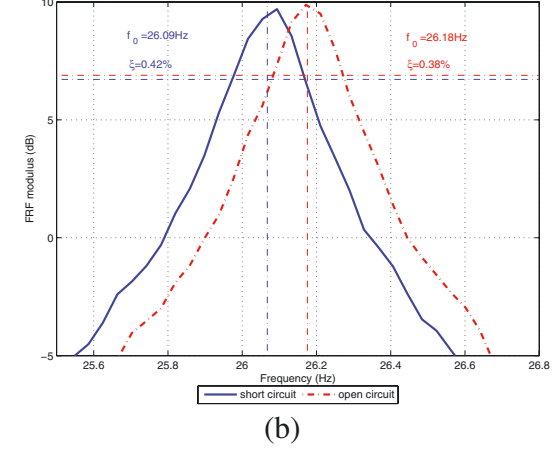
with,

$$K^2 = \frac{f_{\text{OC}}^2 - f_{\text{SC}}^2}{f_{\text{SC}}^2} \quad (2b)$$

Then, optimal resistances are computed from measured or calculated capacitances (Tab. 1) and compared to those obtained from an experimental parametric analysis. Corresponding calculated and measured damping ratios are also compared for validation. Hence, using equations (2), in conjunction with the SC/OC measured frequencies given in Figures 7 and 8, the corresponding modal effective EMCC and theoretical maximum added PSD are calculated and summarized in Table 2. In the latter,  $\xi_{\text{opt}}$  is the total damping ratio calculated as the sum of the SC damping ratio ( $\xi_{\text{SC}}$ ) that can be seen as the nominal damping and the added one ( $\xi_{\text{add}}^R$ ) obtained for the optimal resistive shunt. This is a different use than in [31] of the damping additive property since the added PSD



(a)



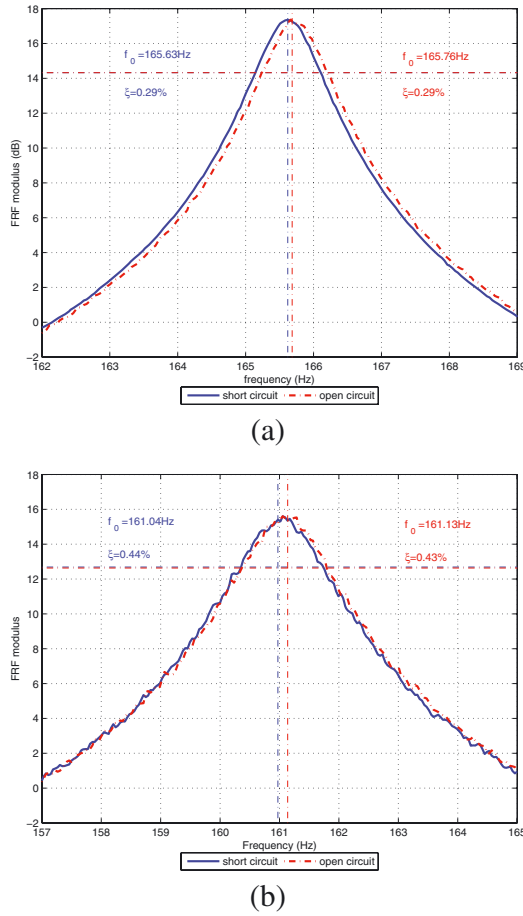
(b)

**Fig. 7.** First mode open-loop SC/OC FRF for: (a) SW. (b) PW.

was deduced there from measured OC and total damping ( $\xi_{\text{add}}^{\text{sh}} = \xi_{\text{opt}} - \xi_{\text{OC}}$ ), while here, it is estimated via equation (2a) and the total damping is computed as  $\xi_{\text{opt}} = \xi_{\text{SC}} + \xi_{\text{add}}^R$ ; i.e., only  $\xi_{\text{SC}}$  is measured. Low values of the added damping ratios can be noticed from Table 2, in particular for the second mode. This can be expected from the corresponding modal effective EMCC that can be seen as a PSD performance indicator. It is worthy to mention that equation (2a) is valid only for *low* modal effective EMCC. It is deduced from an exact relation that was obtained from single mode PSD transfer functions root loci [9]; hence, equation (2a) is also limited to well spaced modes. The exact and approximate resistive PSD formulas comparison and their validation with experimental data [6] were made in [12].

To provide the maximum added piezoelectric shunted damping at the nominal radial frequency  $\bar{\omega} = \omega_{\text{SC}} = 2\pi f_{\text{SC}}$ , the optimal resistance should be chosen as [6]:

$$R_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{1 - k_{31}^2}}{C_p^S \bar{\omega}} \quad (3)$$



**Fig. 8.** Second mode open-loop SC/OC FRF for: (a) SW. (b) PW.

**Table 2.** Modal effective EMCC and predicted optimal damping ratios.

Mode	1		2	
Wiring	Series	Parallel	Series	Parallel
$K$ (%)	7.77	8.31	3.96	3.34
$K^2$ (%) (2b)	0.6	0.69	0.16	0.11
$\xi_{\text{add}}^R$ (%) (2a)	0.15	0.17	0.04	0.03
$\xi_{\text{SC}}$ (%), measured	0.42	0.42	0.29	0.44
$\xi_{\text{opt}} (= \xi_{\text{SC}} + \xi_{\text{add}}^R)$ (%)	0.57	0.59	0.33	0.47
$\xi_{\text{SC}}$ % increase	36	45	14	7

With this relation, the optimal resistances are computed using the capacitances given in Table 1 for both electric connections and the first two bending modes. Experimental capacitances were used to help for minimizing the gap between predictions and measurements and to obtain predicted damping ratios of Table 2. Moreover, to validate the latter, an experimental parametric analysis was performed by varying the shunt resistor for both modes and connections. Corresponding results are summarized in Table 3. The latter indicates that, for the considered connections and modes, the theoretical resistances are in the interval defined by the best tested resistances. It can

**Table 3.** Optimum resistance and damping of a resistively shunted cantilever Aluminium beam.

Mode		1		2	
Wiring		Series		Parallel	
Theoretical	$R_{\text{opt}}$ (k $\Omega$ ) (3)	468	159	75	26
predictions	$\xi_{\text{opt}}$ (%) (Tab. 2)	0.57	0.59	0.33	0.47
Experimental	$R_{\text{opt}}$ (k $\Omega$ )	440	150	70	15
analyses	$\xi_{\text{opt}}$ (%)	0.56	0.55	0.34	0.49

be noticed also that a very good agreement is also reached between predicted and measured optimal damping ratios. These results confirm the low sensitivity of the resistive PSD to the resistor tuning parameter, as in [31, 32], and the damping additive property, as in [31]. Also, the added PSD estimation using the modal effective EMCC, as defined in equations (2), is here experimentally verified; thus, this parameter can be used as a PSD performance indicator.

### 2.3 Modal effective EMCC as a PSD performance indicator

From above experiments, it appears clearly that the knowledge of the modal effective EMCC provides a good estimation, via equation (2a), of the maximum added resistive shunted damping. In fact, its square root is also a very useful damping parameter since it provides an estimation of the maximum added damping of resonant shunting via this approximate relation (see [9] for example):

$$\xi_{\text{add}}^{\text{RL}} \approx \frac{K}{2} \quad (4)$$

The same comments on equation (2a), at the end of the paragraph that follows it, are also valid here for equation (4), except that the exact and approximate resonant PSD formulas comparison and their validation with experimental data [6] were made in [8].

Therefore, to design PSD applications, it is capital to know the modal effective EMCC; then, its *square* and *square root* can inform on the expected maximum added resistive and resonant PSD, respectively. Besides, the use of SC and OC modal analyses renders its calculation easy by commercial codes (available for industry) and makes it a good PSD design criteria. For this reason, the upcoming numerical analyses and test/model correlations will focus only on the modal effective EMCC evaluation and assessment with regards to the above listed realistic features (see the end of the introduction section).

## 3 PSD tests FE modelling, analyses and correlations

### 3.1 Tests FE modelling

The tested cantilever beams, as sketched in Figure 1, with SP and OP symmetrically bonded piezoelectric

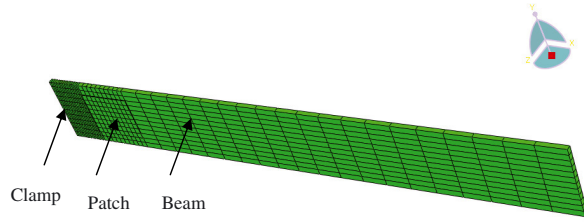


Fig. 9. FE model of the tested cantilever smart beams.

patches and connected electrically in PW and SW, respectively, were modelled using ANSYS multiphysics and ABAQUS<sup>®</sup> FE commercial codes, the only ones available for us to run coupled piezoelectric analysis. However, only the modelling procedure with ABAQUS<sup>®</sup> is retained here because it is thought that it presents higher research and practical added values. ANSYS multiphysics procedures for this benchmark can be found in [36] and in [37] for another benchmark.

The encountered first problem was the incomplete set of PIC255 material data provided by the supplier; to overcome it, the useful provided ones for a 3D FE analysis were completed using the procedure described in [37]. The second problem was to fill the code GUI for the materials properties with the right data since the software does not use the IEEE Standards on piezoelectricity notations [3] regarding the shear electromechanical (elastic and piezoelectric) constants. Also, the code uses the 4 indices notations for the constitutive equations but expects 2 indices notations input data (see Appendix A).

After a preliminary FE model convergence analysis, the cantilever adaptive beam has been discretized using quadratic (20-nodes) brick elements so that the resulting FE model has 885 elements and 8896 nodes; that is, C3D20R (R for reduced integration) and C3D20ER (E for electric) were used for the Aluminium beam and piezoceramic patches, respectively (Fig. 9).

To represent the different poling directions for SP and OP configurations, local coordinates systems were attached to the individual patches. For this purpose, it is necessary to create a “Datum CSYS” for each patch and to assign an orientation so that, for the SP, both patches systems have the same orientation, and for the OP, one of the patches systems will be turned to 180° of the other patch system around the first axis (Fig. 10).

For each electric connection (series or parallel), there are two wiring ways: SC and OC (with or without equipotentiality). These are reached using kinematics linear relations via ABAQUS<sup>®</sup> constraints command. Consequently, sets and constraints are created in terms of the electric degree of freedom, DOF9, to have the various configurations types. Hence, there are two constraint equations for each connection type. First, the different sets are defined for DOF9 as follows:

- $S_{P1}^{ext}$  : all nodes of the patch 1 external surface except a node.
- $N_{P1}^{ext}$  : the remaining node of the patch 1 external surface.

- $S_{P1}^{int}$  : all nodes of the patch 1 internal surface except a node.
- $N_{P1}^{int}$  : the remaining node of the patch 1 internal surface in contact with the beam.
- $S_{P2}^{ext}$  : all nodes of the patch 2 external surface except a node.
- $N_{P2}^{ext}$  : the remaining node of the patch 2 external surface.
- $S_{P2}^{int}$  : all nodes of the patch 2 internal surface except a node.
- $N_{P2}^{int}$  : the remaining node of the patch 2 internal surface in contact with the beam.
- $N_{beam}^1$  : a node of the beam in contact with the patch 1.
- $N_{beam}^2$  : a node of the beam in contact with the patch 2.

For each connection, realized wirings (OC and SC) are represented by their equivalent linear relations (Fig. 11):

$$N_{P2}^{int} - N_{P1}^{int} = 0$$

$$N_{P1}^{ext} - N_{beam}^1 = 0$$

$$N_{P2}^{ext} - N_{beam}^2 = 0 \quad (5)$$

$$N_{P2}^{int} - N_{P1}^{int} = 0$$

$$N_{P2}^{ext} - N_{P1}^{ext} = 0 \quad (6)$$

$$N_{P2}^{int} - N_{P1}^{int} = 0 \quad (7)$$

Also, applying SC or OC EBC is realized directly in the GUI by selecting the nodes of the electrodes to apply the EBC. Hence, for the SC condition, it is enough to select the nodes of the patches four faces and to apply on them a nil potential. While, for the OC case, the faces of patches are charge free. The usual way is to not apply any electric condition. However, for physical reasons, the EP condition has to be added by coupling the nodes of each face of the patches. Hence, to express the equipotentiality constraints of the patches surfaces, the following relationships are used between the electric DOFs (DOF 9):

$$S_{P1}^{ext} - N_{P1}^{ext} = 0$$

$$S_{P1}^{int} - N_{P1}^{int} = 0$$

$$S_{P2}^{ext} - N_{P2}^{ext} = 0$$

$$S_{P2}^{int} - N_{P2}^{int} = 0 \quad (8)$$

An easier alternative technique to simulate the electric connections is also proposed; it is based on the polarization orientation by changing the sign of the patches individual piezoelectric matrices. For this, first, a unique piezoelectric matrix with same signs is used for both patches as in Figures 12a and 12b for the SP and OP configurations; then, the piezoelectric matrix sign of one of the patches is changed in order to get OP and SP ones, respectively. However, this requires the definition of two different materials, one for each patch as in Figures 12c, 12d.



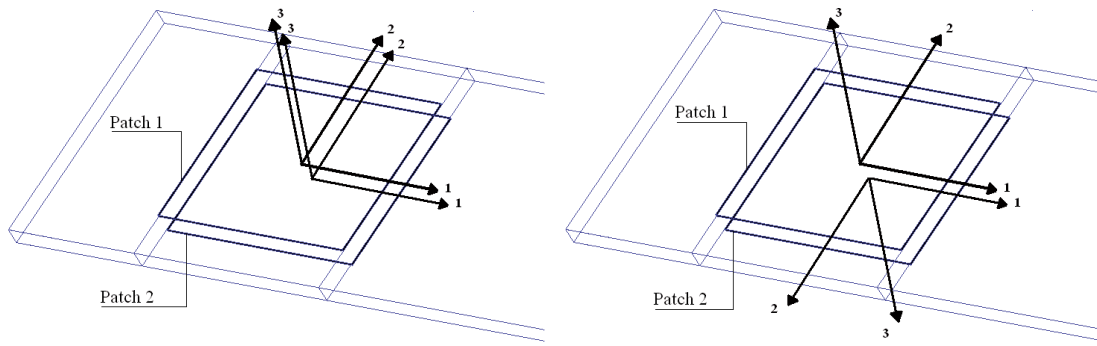


Fig. 10. SP and OP modelling.

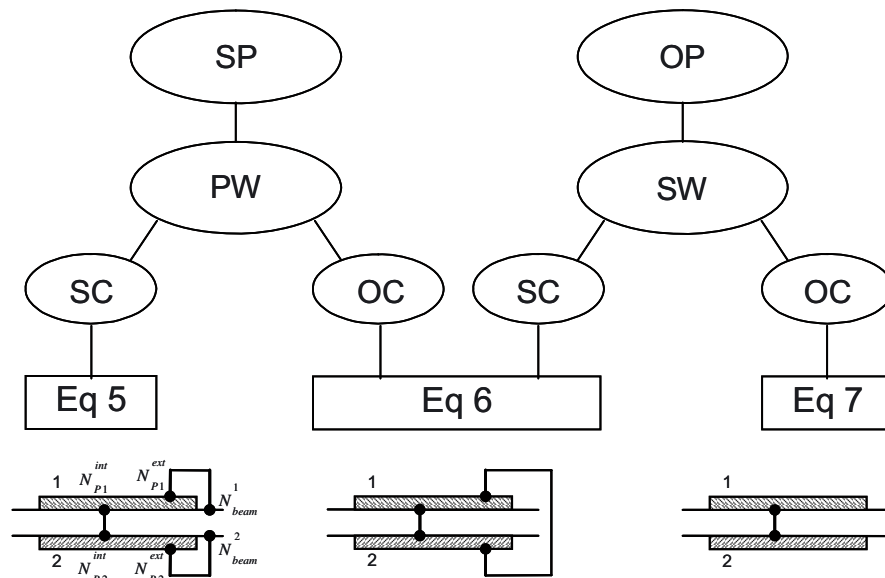


Fig. 11. Linear relations for modelling PW and SW.

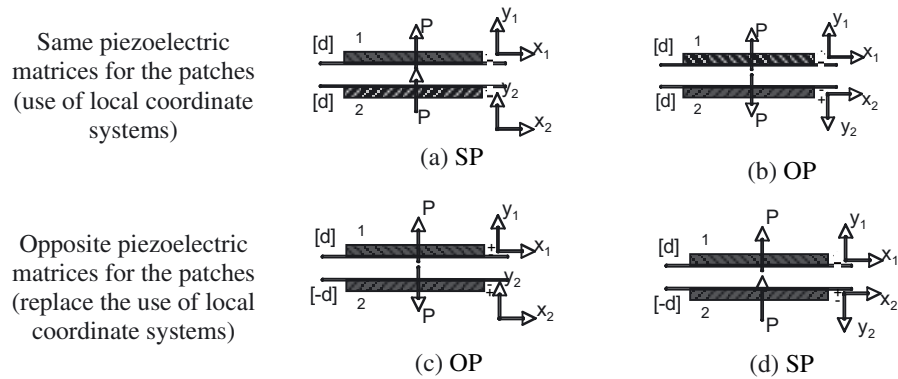


Fig. 12. SP/OP modeling using local coordinate systems or changing piezoelectric matrices signs.

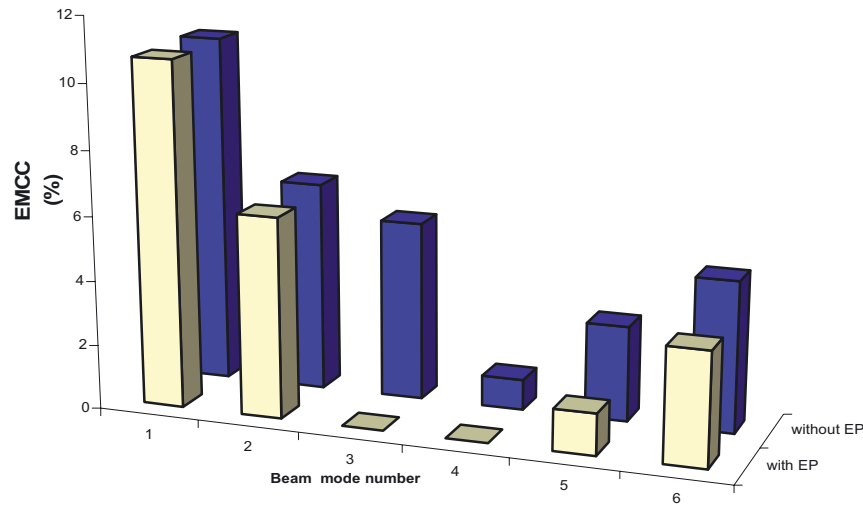


Fig. 13. EP (decoupling) effect on the modal effective EMCC.

### 3.2 Preliminary FE analyses

Preliminary FE free vibration analyses (without models updating), using the iterative block subspace algorithm, of the four configurations, shown in Figure 12, for the OC case with or without applying the EP condition, equation (8), and with or without the electric connections equations (5–7), have shown that both modelling techniques of the polarisation orientations are equivalent and that the electric connection equations (5–7) have no influence on the frequencies. Also, SP and OP configurations gave the same frequencies in contrary to the experimental results; this may be due to the patches bending layers and the damping that have not been considered in the FE models.

The obtained results for the first six modes are shown in Figures 13 and 14. The latter show that the effect of the EP condition on the frequencies is very small but is important on the modal effective EMCC in particular for marginally coupled modes as for the last two ones. Moreover, the in-plane (plate) bending (3rd) and torsion (4th) modes (see Fig. 15) become uncoupled when the EP is applied because their potential distributions are unsymmetric (see Fig. 14); hence, the application of the EP constraint makes their electrode potential distribution average nil leading to identical SC and OC frequencies, hence a nil EMCC. Figure 14 shows clearly that when the EP is not considered in the piezoelectric FE analyses, the electric potential is no longer uniform on the patches electrodes; this is not consistent with the physics. This figure was obtained under the condition that the patches-to-beam interfaces are grounded; otherwise the uniform potential distribution overpasses the patches areas.

First two modes (Fig. 16) modal effective EMCC FE results (without models updating) are compared to the experimental ones in Figure 17 which indicates that deviations are important for both modes. Models updating with measurements are then necessary to reduce simulations errors.

### 3.3 Electromechanical updating for test/model correlation

For better correlations purpose, FE models were updated both mechanically and electrically. Mechanical updating was first made by removing the clamp then blocking only the two translations in the cross-section plan. The translation in the beam axial direction was let free, but a spring is added for the free DOF which stiffness is distributed on all the face nodes using ABAQUS® *Spring/Dashpots* function. This modification allows the first section to rotate around the y-axis; thus the clamp is less stiff and the modal frequencies are lower. Different updating stiffness values per node  $k_n$  were tested using the classical trial and error technique (more details can be found in [11, 37]). Using spring stiffness values of 2.05 MN/m and 2.48 MN/m for the SP and OP configurations, respectively, led to relative deviations of 0% for the fundamental frequency of both configurations and 1.22% and 2.65% for the second mode under these configurations, respectively. On the other hand, electric updating was reached by using the computed transverse blocked dielectric constant from the measured (see Tab. 1) SP and OP blocked capacitances (individual) using this formula:

$$\epsilon_{33}^S = \frac{C_p^S h}{A} \quad (9)$$

After electromechanical updating, computed SP and OP OC (with EP) modal frequencies and effective EMCC are now different as given in Table 4. When compared to experimental results of the first two modes, a great enhancement of the test/model correlation can be noticed as shown in Table 5. The latter shows higher deviations for the second mode (slightly coupled) than for the first one (coupled) which can be considered satisfactory; this can be explained by the low EMCC values of the former; that is, although the difference between SC and OC values are very small, their squared values are amplified through the EMCC evaluation.

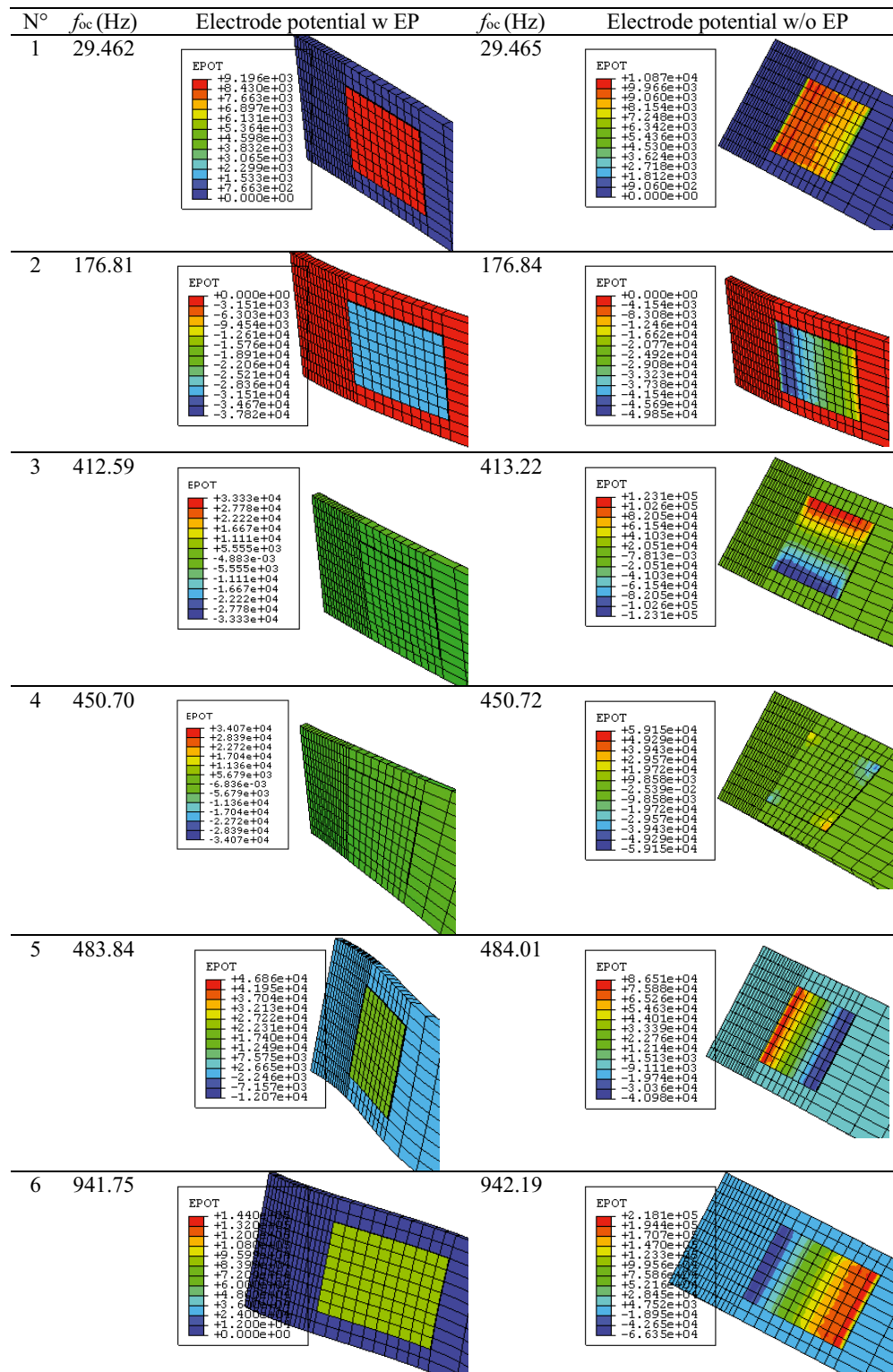
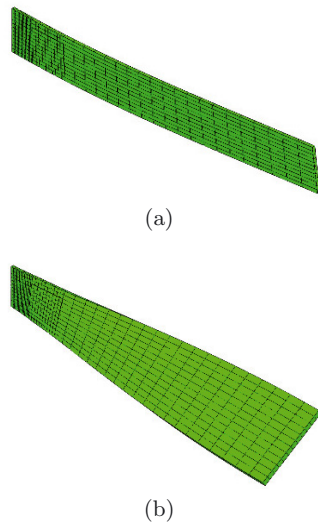
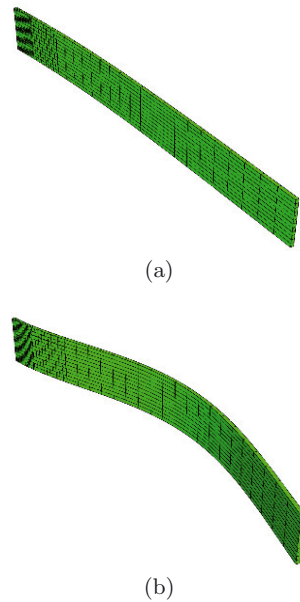


Fig. 14. Electrodes potential distributions w vs. w/o EP for OC SP patches (grounded interfaces).



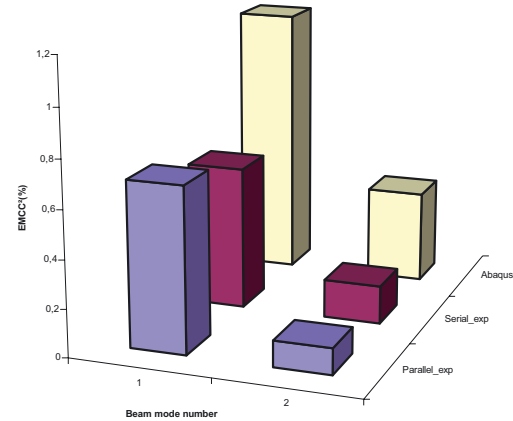
**Fig. 15.** Mode shapes of the decoupled modes by the EP constraint: (a) Mode 3. (b) Mode 4.



**Fig. 16.** First two mode shapes: (a) Mode 1. (b) Mode 2.

## 4 Conclusions

This work has evaluated the experimental performance of the piezoelectric resistive extension piezoelectric shunted damping (PSD) concept on a simple laboratory setup. The latter consisted of a cantilever Aluminium thin (*long*) beam with a *single* pair of same or opposite poled *small* piezoceramic patches bonded on its opposite faces near the clamp and wired electrically either in series or in parallel. Good correlations between theoretical and experimental optimal resistances and damping ratios were reached for the measured first two bending modes.



**Fig. 17.** Experimental and FE (with EP for OC) squared EMCC for the first two modes.

**Table 4.** First six FE (with EP for OC) frequencies and EMCC after electromechanical updating (EMU).

Configuration (EMU parameters)	Mode	FE (w EP)		
		$f_{OC}$ (Hz)	$f_{SC}$ (Hz)	$K$ (%)
SP ( $k = 2.05$ MN/m, $C_p^s = 17.9/17.6$ nF)	1	26.194	26.092	8.85
	2	159.15	159.08	2.97
	3	333.56	333.56	0
	4	441.86	441.86	0
	5	443.99	443.9	2.02
OP $k = 2.48$ MN/m, $C_p^s = 23/23.8$ nF	6	880.52	878.85	6.17
	1	26.65	26.561	8.19
	2	161.31	161.24	2.95
	3	343.25	343.25	0
	4	442.42	442.42	0
	5	448.2	448.14	1.64
	6	885.91	884.63	5.38

**Table 5.** EMCC test/model correlation after FE models electromechanical updating (EMU).

Mode	Tests (ref.):		FE w EMU:		Deviation	
	$K$ (%)		$K$ (%)		SP OP	
	SP (PW)	OP (SW)	SP	OP	SP	OP
1	8.31	7.77	8.85	8.19	6.50	5.41
2	3.34	3.96	2.97	2.95	11.08	25.5

However, the obtained damping ratios were found to be very low.

On the other hand, this work has presented refined (realistic) finite element (FE) modelling and analyses using ABAQUS<sup>®</sup> *commercial code* of above PSD tests regarding the modal effective electromechanical coupling coefficient (EMCC) which is proposed here as a *PSD performance indicator*; in particular, it was found that good test/model correlations require: (i) to take care of the patches poling directions and their corresponding electric connections (*wiring*); (ii) to consider the *equipotentiality* (EP) constraint for OC electrodes; (iii) and to conduct *electromechanical updating* of the FE models.

This work has contributed to the PSD research field by the proposed tests and their refined simulations. It

**Table A1.** Materials properties.

Materials	Constants (SI unit)	Notations	Values
PIC255 (completed properties as in [37])	Permittivity constants at constant strain (nF/m)	$\epsilon_{11}^S = \epsilon_{22}^S$	8.245
		$\epsilon_{33}^S$	7.122
	Stress piezoelectric coupling constants (C/m <sup>2</sup> )	$e_{31} = e_{32}$	−7.25
		$e_{33}$	14.41
		$e_{15} = e_{24}$	11.57
	SC Young's moduli (GN/m <sup>2</sup> )	$E_1 = E_2$	62.1
		$E_3$	48.3
	SC Poisson's ratios	$\nu_{12}$	0.32
		$\nu_{13} = \nu_{23}$	0.44
	SC Shear moduli (GN/m <sup>2</sup> )	$G_{12}$	23.5
Aluminum (assumed properties)		$G_{13} = G_{23}$	21
	Density (Kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$	7800
	Young's modulus (GN/m <sup>2</sup> )	$E$	69
	Poisson's ratio	$\nu$	0.3
	Mass density (Kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$	2700

was discovered, from the latter, that the physical EP constraint has a decoupling effect (Fig. 13, Tab. 4) and decreases the modal effective EMCC. A recent additional experimental campaign has validated these findings [37].

*Acknowledgements.* This work has been supported by the European Commission via the contract n° FP6 NMP3-CT-13517 (CASSEM). The authors gratefully acknowledge this financial support.

## Appendix A

The *Engineering constants* of the materials, used in the 3D FE simulations are shown (from [37]) in Table A1.

In *ABAQUS*® notations, these data can be put in matrix form for GUI use as follows:

- SC elastic stiffness matrix  $[\mathbf{D}^\varphi]$

$$\begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{1122} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{1133} & D_{2233} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2323} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.2 & 58.3 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 58.3 & 105.2 & 55.4 & 0 & 0 & 0 \\ 55.4 & 55.4 & 85.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.0 \end{bmatrix} \text{ GN.m}^{-2} \quad (\text{A.1})$$

- Strain piezoelectric matrix  $[\mathbf{d}]$  (converted by ABAQUS® to the stress one  $[\mathbf{e}]$  via  $[\mathbf{e}] = [\mathbf{d}][\mathbf{D}^\varphi]$ )

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{223} \\ d_{311} & d_{322} & d_{333} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 550 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ -180 & -180 & 400 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pC.N}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

- Relative blocked dielectric permittivity (at constant strains  $\varepsilon$ ) matrix  $[\mathbf{D}^\varepsilon]$

$$\begin{bmatrix} D_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.245 & 0 & 0 \\ 0 & 8.245 & 0 \\ 0 & 0 & 7.122 \end{bmatrix} \text{ nF.m}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

## References

- [1] R.L. Forward, Electronic damping of vibrations in optical structures, *Appl. Opt.* 18 (1979) 690–697
- [2] IRE, IRE Standards on piezoelectric crystals: determination of the elastic, piezoelectric, and dielectric constants, *Proc. IRE* 46 (1958) 764–778
- [3] IEEE, IEEE Standards on piezoelectricity. *ANS n°* 176–187, 1988
- [4] M. Naillon, R.H. Coursant, F. Besnier, Analyse de structures piézoélectriques par une méthode d'éléments finis, *Acta Electronica* 25 (1983) 341–362
- [5] S.H. Chang, N.N. Rogacheva, C.C. Chou. Analysis methods for determining electromechanical coupling coefficients of piezoelectric elements, *IEEE Trans. Ultras. Freq. Control* 42 (1995) 630–640

- [6] N.W. Hagood, A. von Flotow, Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks, *J. Sound Vib.* 146 (1991) 243–268
- [7] A. Benjeddou, J.A. Ranger-Vieillard, Use of shunted shear-mode piezoceramics for structural vibration passive damping, *Comput. Struct.* 84 (2006) 1415–1425
- [8] A. Benjeddou, J.A. Ranger, Vibration damping using resonant shunted shear-mode piezoceramics, in: C.A. Mota Soares et al. (éds.), *Proceedings of the Third European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Lisbon, June 2006
- [9] B. de Marneffe, Active and passive vibration isolation and damping via shunted transducers, Thèse, Faculté des Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles, Décembre 2007
- [10] J.F. Deü, A. Benjeddou, Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic layers, *Int. J. Solids Struct.* 42 (2005) 2059–2088
- [11] M.A. Al-Ajmi, A. Benjeddou, Damage indication in smart structures using modal effective electromechanical coupling coefficients, *Smart Mater. Struct.* 17 (2008) 035023
- [12] A. Benjeddou, J.A. Ranger, Simple finite element modelling and performance evaluation of passive vibration damping using shunted piezoceramics, in: *Proceedings of the First International Congress on Design and Modelling of Mechanical Systems*, Hammamet, March 2005
- [13] G.A. Lesieutre, Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials, *Shock Vib. Dig.* 30 (1998) 187–195
- [14] M. Ahmadian, A.P. DeGuilio, Recent advances in the use of piezoceramics for vibration suppression, *Shock Vib. Dig.* 33 (2001) 15–22
- [15] S.O.R. Moheimani, A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers, *IEEE Trans. Control Syst. Tech.* 11 (2003) 482–494
- [16] C. Poizat, A. Benjeddou, On analytical and finite element modelling of piezoelectric extension and shear bimorphs, *Comput. Struct.* 84 (2006) 1426–1437
- [17] N.W. Hagood, W.H. Chung, A. von Flotow, Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 1 (1990) 327–354
- [18] J.J. Hollkamp, Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 5 (1994) 49–57
- [19] C.H. Park, Y.H. Kim, H.C. Park, Dynamic formulation of plates with shunted piezoelectric materials, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 16 (2005) 971–976
- [20] J. Kim, Y.H. Ryu, S.B. Choi, New shunting parameter tuning method for piezoelectric damping based on measured electrical impedance, *Smart Mater. Struct.* 9 (2000) 868–877
- [21] C.L. Davis, G.A. Lesieutre, A modal strain energy approach to the prediction of resistively shunted piezoceramic damping, *J. Sound Vib.* 181 (1995) 129–139
- [22] C. Poizat, M. Sester, Finite element modelling of passive damping with resistively shunted piezocomposites, *Computational Mater. Sci.* 19 (2000) 183–188
- [23] K. Adashi, Y. Awakura, T. Iwatsubo, Variable hybrid piezoelectric damping based on control power requirement, in: D.J. Inman (éd.), *Proceedings SPIE Smart Structures and Materials: Damping and Isolation* 4331 (2001) 396–407
- [24] T. Tanimoto, A new vibration damping CFRP material with interlayers of dispersed piezoelectric ceramic particles, *Compos. Sci. Tech.* 67 (2007) 213–221
- [25] S. Desai, M. Lovell, J. Cordle, Coupled field analysis of a piezoelectric bimorph disc in a direct write process, *Compos. Pt. B* 38 (2007) 824–832
- [26] S.B. Choi, H.S. Kim, J.S. Park, Multi-mode vibration of a CD-ROM drive base using a piezoelectric shunt circuit, *J. Sound Vib.* 300 (2007) 160–175
- [27] G. Chevallier, J.A. Ranger, A. Benjeddou, H. Sebbah, Passive vibration damping using resistively shunted piezoceramics: an experimental performance evaluation, in: *Proceedings of the Second International Congress on Design and Modelling of Mechanical Systems*, Monastir, March 2007
- [28] N. Zhang, I. Kirpitchenko, Modelling dynamics of a continuous structure with a piezoelectric sensor/actuator for passive structural control, *J. Sound Vib.* 249 (2002) 251–261
- [29] S.B. Kandagal, K. Venkatraman, Form factors for vibration control of beams using resistively shunted piezoceramics, *Letter to the Editor of J. Sound Vib.* 274 (2004) 1123–1133
- [30] A. Belloli, D. Niederberger, S. Pietrzko, M. Morari, P. Ermanni, Structural vibration control via R-L shunted active fiber composites, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 18 (2007) 275–287
- [31] J. Becker, O. Fein, M. Maess, L. Gaul, Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping, *Comput. Struct.* 84 (2006) 2340–2350
- [32] U. Andreaus, M. Porfiri, Effect of electrical uncertainties on resonant piezoelectric shunting, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 18 (2007) 477–485
- [33] A. Agnani, F. Mastroddi, G.M. Polli, Shunted piezoelectric patches in elastic and aeroelastic vibrations, *Comput. Struct.* 81 (2003) 91–105
- [34] M.A. Trindade, A. Benjeddou, R. Ohayon, Finite element analysis of frequency- and temperature-dependent hybrid active-passive vibration damping, *Europ. J. Finite Elem.* 9 (2000) 89–111
- [35] M.A. Trindade, A. Benjeddou, R. Ohayon, Modelling of frequency-dependent viscoelastics for hybrid active-passive vibration control, *ASME J. Vib. Acoust.* 122 (2000) 169–174
- [36] S. Ghorbel, G. Chevallier, A. Benjeddou, Détermination expérimentale et numérique du coefficient de couplage électromécanique généralisé de structures piézoélectriques, in : *XVIème Colloque Vibrations Chocs et Bruit*, Lyon, 10–12 juin 2008
- [37] G. Chevallier, S. Ghorbel, A. Benjeddou, A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures, *Smart Mater. Struct.* 17 (2008) 065007, p. 11



## Annexe B

# Viscoélasticité : de la mesure à la simulation

### Contenu du chapitre

Les principaux articles ou actes de congrès sont repris dans cette partie, soient :

- [1] G. Chevallier, F. Renaud, S. Thouviot, and J.-L. Dion. Complex eigenvalue analysis for structures with viscoelastic behavior. Washington DC, 2011. ASME IDETC.
- [2] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Viscoelasticity measurement and identification of viscoelastic parametric models. Washington DC, 2011. ASME IDETC.
- [3] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, and R. Lemaire. A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized maxwell model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :991–1010, April 2011.





# A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized Maxwell model

Franck Renaud <sup>a,\*</sup>, Jean-Luc Dion <sup>a</sup>, Gaël Chevallier <sup>a</sup>, Imad Tawfiq <sup>a</sup>, Rémi Lemaire <sup>b</sup>

<sup>a</sup> LISMMA-EA2336, Institut Supérieur de Mécanique de Paris, 3 rue Fernand Hainaut, 93400 Saint Ouen, France

<sup>b</sup> BOSCH - Chassis Systems Brakes, 126 Rue de Stalingrad, 93700 Drancy, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 18 December 2009

Received in revised form

30 August 2010

Accepted 2 September 2010

Available online 21 September 2010

### Keywords:

Viscoelasticity

Identification

Generalized Maxwell

Fractional derivatives

Transfer function

Pole-zero

## ABSTRACT

This paper focuses on the generalized Maxwell model (GMM) identification. The formulation of the transfer function of the GMM is defined, as well as its asymptotes. To compare identification methods of the parameters of the GMM, a test transfer function and two quality indicators are defined. Then, three graphical methods are described, the enclosing curve method, the CRONE method and an original one. But the results of graphical methods are not good enough. Thus, two optimization recursive processes are described to improve the results of graphical methods. The first one is based on an unconstrained non-linear optimization algorithm and the second one is original and allows constraining identified parameters. This new process uses the asymptotes of the modulus and the phase of the transfer function of the GMM. The result of the graphical method optimized with the new process is very accurate and fast.

© 2010 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Many mechanical systems are damped with viscoelastic materials. This helps to avoid instabilities and to limit the levels of vibration. Although the viscoelastic behavior of materials is of great importance in order to obtain accurate results, the assumption of purely elastic materials is very commonplace for frequency analysis with finite element (FE) models. In order to carry out realistic complex eigenvalue analysis (CEA) in dynamics, one needs to model viscoelasticity. Linear viscoelasticity has been described by many authors, for citing just a few of them: Ferry [1], Vinh [2], Caputo and Mainardi [3], Lakes [4], Chevalier and Vinh [5], or Balmès and Leclère [6]. Linear viscoelasticity assumes the existence of a relation between stress,  $\sigma_{ij}$ , of a material and its strain,  $\varepsilon_{kl}$ , history. Let us call  $h_{ijkl}(t)$ , the relaxation function which is also an element of the complex stiffness tensor. The Fourier transform is denoted with a hat

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t h_{ijkl}(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \\ \hat{\sigma}_{ij}(\omega) = \hat{h}_{ijkl}(\omega) \hat{\varepsilon}_{kl}(\omega) \end{cases} \quad (1)$$

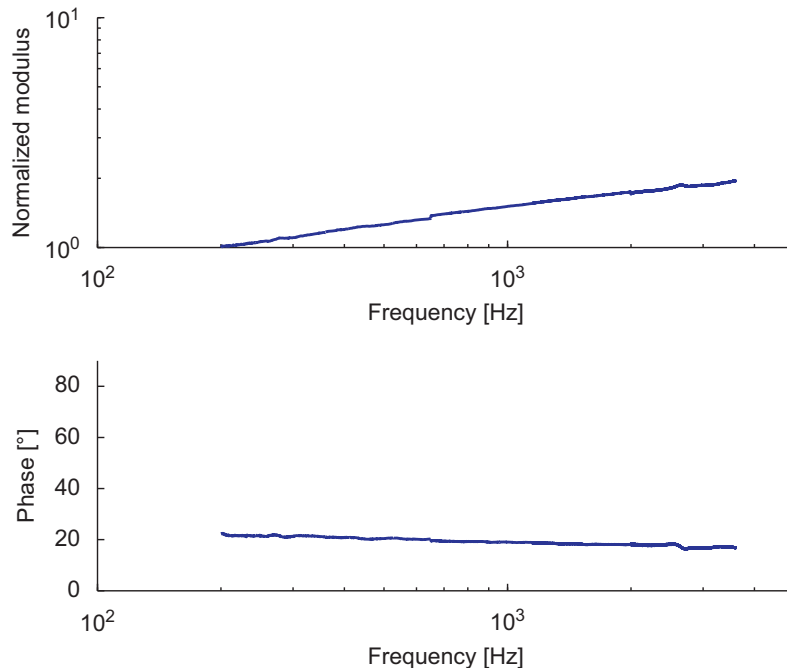
Linear viscoelasticity is defined by the Relations (1). In the present paper, identification will be conducted on  $\hat{h}_{ijkl}(\omega)$  by considering a rheological model between  $\hat{\sigma}_{ij}$  and  $\hat{\varepsilon}_{kl}$ . Linear viscoelasticity of rheological models is written in terms of force and displacement:  $F(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ , with  $H(\omega)$ , the complex stiffness of a viscoelastic material, equivalent to  $\hat{h}_{ijkl}(\omega)$ .

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [franck.renaud@supmeca.fr](mailto:franck.renaud@supmeca.fr) (F. Renaud), [jeanluc.dion@supmeca.fr](mailto:jeanluc.dion@supmeca.fr) (J.-L. Dion), [gael.chevallier@supmeca.fr](mailto:gael.chevallier@supmeca.fr) (G. Chevallier).

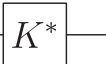


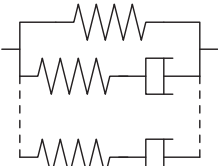
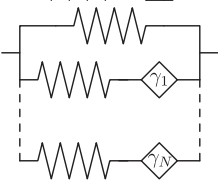
Nomenclature			
$\sigma_{ij}$	the stress and $\hat{\sigma}_{ij}$ its Fourier transform	$G_i$	coefficient of the $i$ th spring-pot
$\varepsilon_{kl}$	the strain and $\hat{\varepsilon}_{kl}$ its Fourier transform	$\gamma_i$	fractional derivative order of the $i$ th Pole–Zero couple
$h_{ijkl}$	the relaxation function and $\hat{h}_{ijkl}$ its Fourier transform	$\omega_{z,i}^u$	the Zero of the $i$ th Pole–Zero couple during the $u$ th iteration and $\chi_{z,i}^u = \log(\omega_{z,i}^u)$ its logarithm. With $i \in [1..N]$
$\omega$	angular frequency	$\omega_{p,i}^u$	a pole and $\chi_{p,i}^u = \log(\omega_{p,i}^u)$ its logarithm
$\chi$	$= \log(\omega)$ logarithm of the angular frequency	$\omega_{c,i}^u$	$= \sqrt{\omega_{z,i}^u \omega_{p,i}^u}$ the medium frequency of a Pole–Zero couple and $\chi_{c,i}^u = (\chi_{z,i}^u + \chi_{p,i}^u)/2$ its logarithm
$H(\omega)$	$=  H(\omega)  \times \exp(j\psi(\omega))$ measured impedance of the material. A test function in this paper	$\delta_{ij}$	Kronecker's symbol
$Z(\omega)$	$=  Z(\omega)  \times \exp(j\varphi(\omega))$ impedance of the identified model	$A$	area under the phase curve
$ Z^u(\chi_k) $	modulus of the model, during the $u$ th iteration taken at the angular frequency $10^{\chi_k}$ of the $k$ th point of the modulus curve. With $k \in [1..V]$ , and $u \in [1..U]$	$S$	stiffening of the impedance modulus
$\varphi^u(\chi_k)$	phase of the model, during the $u$ th iteration taken at the angular frequency $10^{\chi_k}$ of the $k$ th point of the phase curve. With $k \in [1..V]$ , and $u \in [1..U]$	$\delta_{ Z }$	modulus convergence indicator
$\eta$	damping rate	$\delta_\varphi$	phase convergence indicator
$K_0$	static stiffness taken at $\omega = 0$ , i.e. $t = +\infty$	$r$	weighting coefficient
$K_i$	stiffness of the $i$ th spring	<b>Acronyms</b>	
$C_i$	damping of the $i$ th dashpot	GMM	generalized Maxwell model
		PZF	Pole–Zero formulation
		GFCMM	generalized fractional calculus Maxwell model
		CEA	complex eigenvalue analysis

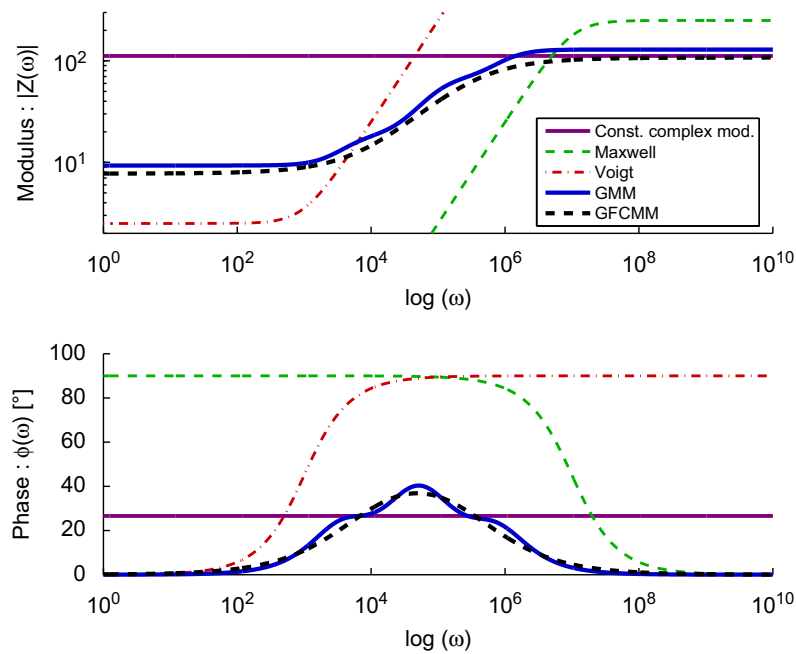
Tests on viscoelastic materials led by many authors exhibit strong stiffness frequency dependence on both modulus and phase (see Vinh [2], Soula et al. [7,8]). For example, Fig. 1 shows the stiffness of a multi layer material with layers of glue, rubber and steel. The non-Zero value of the stiffness phase of viscoelastic materials is well known, because it generates damping. But the stiffness modulus is also frequency dependent, hence, simple models, with constant modulus, such as constant complex modulus or modal damping are not sufficient enough for carrying out CEA. In order to show how five of these viscoelastic models behave, they are listed with their complex impedance formulas in Table 1. All these models are



**Fig. 1.** Complex shear stiffness of a multilayer viscoelastic material at ambient temperature in the [200–3500 Hz] frequency range. The top graph represents the normalized modulus  $H(f)/H(f=200\text{ Hz})$  (dimensionless) and the bottom graph represents the phase  $\psi$  (in degrees).

**Table 1**  
Rheologic representation of some common linear viscoelastic models.

Linear models	Symbol	Frequency representation $Z(\omega)$
Constant complex modulus		$K(1+j\eta)$
Maxwell		$(j\omega KC)/(K+j\omega C)$
Voigt		$K+j\omega C$
Generalized Maxwell		$K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i}$
Generalized fractional calculus Maxwell		$K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{(j\omega)^{\gamma_i} K_i G_i}{K_i + (j\omega)^{\gamma_i} G_i}$



**Fig. 2.** Complex stiffness of the viscoelastic models described in Table 1. The parameters of these models are detailed in Table 3 in Appendix A.

**Table 2**  
Poles and Zeros list of the test function and  $K_{stk} = 1000$ .

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5	6
$\chi_z$	2.52	3.10	3.20	4.10	4.40	4.80
$\chi_p$	2.95	3.50	3.75	3.80	4.60	5.25
$\chi_p - \chi_z$	0.43	0.40	0.55	−0.30	0.20	0.45

linear ones. Fig. 2 shows the modulus and the phase versus frequency of each model. The parameters used to produce this figure are given in Table 3 in Appendix A.

The constant complex modulus model is non-causal so it is only suitable in the frequency domain, Gaul et al. [9]. The constant complex modulus is not a relevant model since its modulus is constant. The models of Maxwell and Voigt are efficient only on a small frequency range, but they are unrealistic, respectively, at low and high frequency, where their modulus is infinitely small and high. Moreover, a ninety-degree-of-phase material would tend towards a viscous fluid.

We would like to point out that generalized Maxwell model is classically composed of Maxwell cells in parallel (see Koeller [10]). With such definition this model is not able to display reversible creep (see Caputo and Mainardi [3]). As this paper deals only with viscoelastic solids, generalized Maxwell model (GMM) and generalized fractional Maxwell model would refer to a spring in parallel with, respectively, Maxwell cells and fractional calculus Maxwell cells (see Koeller [10]). Thus the GMM defined here is the same as that used by Chevalier and Vinh [5] and the same as the Maxwell representation given by Caputo and Mainardi [3], without the first dashpot. The fractional derivatives allow describing behaviors between purely elastic and purely viscous. Oldham and Spanier [11] and Podlubny [12] have described the mathematical properties of fractional derivatives. Podlubny [12] has given some examples for viscoelasticity. Vinh [2], Koeller [10], Bagley and Torvik [13], Gaul et al. [9], Chevalier and Vinh [5] have studied the application of fractional derivatives in viscoelasticity. Lion [14,15] has investigated rheological models incorporating “fractional damping elements”, called spring-pots, from the point of view of thermodynamics. Heymans [16] has extended the fractional calculus to non-linear viscoelasticity. Koeller [10] has defined the spring-pot as a rheological element whose stress is proportional to the fractional derivative of the strain.

Generalized Maxwell model (GMM) and generalized fractional calculus Maxwell model (GFCMM) (see Table 1) seem to be very relevant. Firstly, their modulus is constant at low frequency, secondly, it increases on a frequency range and finally it is also constant at high frequency (see Fig. 2). Moreover, their phase is firstly nil at low frequency, secondly it is non-zero on a frequency range and finally it is also nil at high frequency (see Fig. 2). GFCMM uses non-integer derivative orders. The use of a GFCMM in state space model requires that these derivative orders are fractions of integer. Both GMM and GFCMM allow one to describe behaviors between purely elastic and purely viscous materials (see Vinh [2], Soula et al. [7]). Fig. 2 plots a transfer function of a GFCMM with one Pole–Zero couple with a derivation order of  $\gamma = 1/2$ . The GMM plotted in blue in Fig. 3 has three couples of spring and dashpot in series. It allows describing the same behavior as the Pole–Zero fractional derivatives model. By increasing the number of spring and dashpot in series, the blue curve will tend towards the black one. Although the two models are relevant for viscoelasticity, the present paper focuses on GMM.

Given a viscoelastic material, one needs to identify the parameters of the GMM from experiments. Common tests can be sorted in three kinds of methods. The first ones are based on Oberst’s beam method. It consists in comparing the frequency

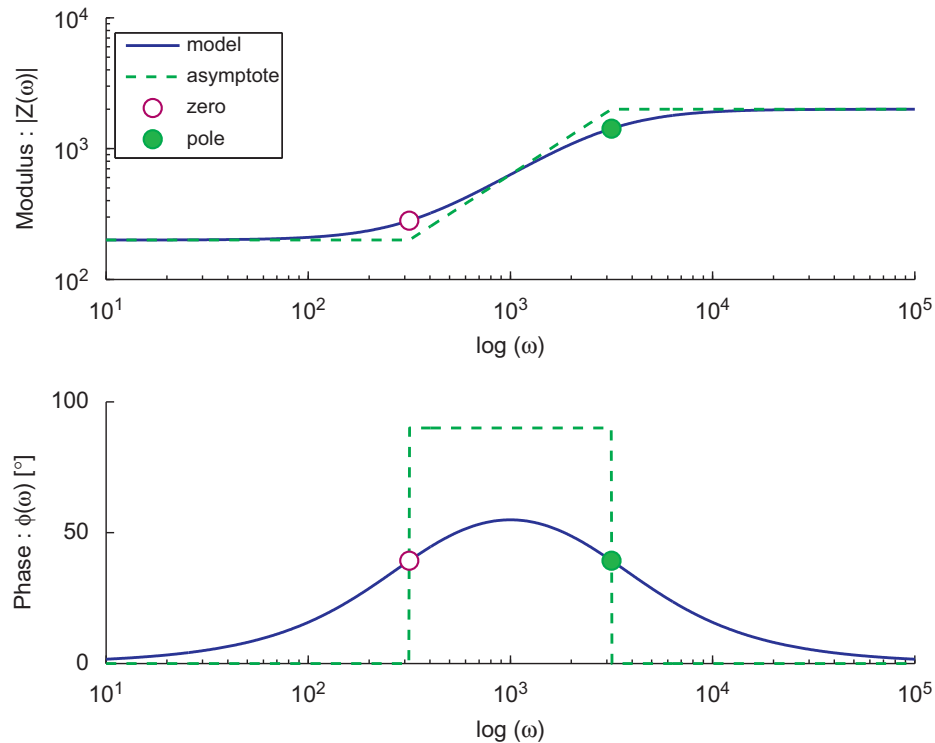


Fig. 3. The modulus and the phase of a PZF with only one Pole–Zero couple (see Eqs. (6), (9) and (10)). The asymptotes are plotted in dashed line.

response function of a structure with and without the viscoelastic material to be tested (see Frankenfeld [17], Zhang and Richards [18], Castello et al. [19], de Lima et al. [20]). Although this works well for low damping materials, this only allows one to measure values taken at the frequency of the first Eigenmodes of the beam. The second kind of tests consists in studying the creep and relaxation curves of materials (see Chen [21]). This is very efficient to get values at low frequency, when the material takes time to respond to the excitation. But to get high frequency values, one needs to assess a perfect unit step function when exciting the material, which is technically hard. The last kind of test is the dynamic mechanical analysis. This consists in forcing oscillations of a material at a frequency and measuring its strain and its stress far from the resonance frequencies of the test bench. By sweeping in frequency, one is able to build the transfer function between stress and strain on a wide frequency range. This last kind of test is the most suitable for acquiring knowledge on the behavior of a material versus frequency.

Given an experimental transfer function characterizing a complex stiffness  $H(\omega)$ , the identification of the parameters of the GMM can be carried out with some graphical methods. Two of them were described by Vinh [2] and Oustaloup [22]. These methods are led on Pole–Zero formulations which are equivalent to the GMM. For example, the equivalence between the classical standard linear solid<sup>1</sup> and a Pole–Zero formulation with one Pole–Zero couple is demonstrated by

$$\begin{cases} Z(\omega) = K_0 + \frac{j\omega K_1 C_1}{K_1 + j\omega C_1} = K_0 \frac{1 + j\omega(C_1/K_1 + C_1/K_0)}{(1 + j\omega C_1/K_1)} = K_0 \frac{1 + j\omega/\omega_{z,1}}{1 + j\omega/\omega_{p,1}} \\ \omega_{z,1} = \left(\frac{C_1}{K_1} + \frac{C_1}{K_0}\right)^{-1} = \frac{K_0 K_1}{C_1(K_0 + K_1)} \quad \text{and} \quad \omega_{p,1} = \frac{K_1}{C_1} \end{cases} \quad (2)$$

The graphical identification methods use the characteristics of the asymptotes of Pole–Zero formulations. The present paper presents an algorithm based on the principles of these graphical methods. This algorithm allows one to identify parameters from both the modulus and the phase curves with more efficiency than the classical graphical methods thanks to the optimization algorithm based on asymptotes.

## 2. Theoretical aspects

### 2.1. The generalized Maxwell model

Experimental transfer functions, characterizing complex stiffnesses, are well described by their modulus and phase. They are usually plotted versus the logarithm of the frequency. Moreover, the modulus is usually represented in logarithmic scale. In such scale, models with a product of terms, like Pole–Zero formulations (PZF given by Eq. (3)), become a sum of terms. This is why PZF are very suitable for the identification of parameters on transfer functions. The rheological formulation of GMM already presented in Table 1, is reminded in Eq. (4).

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})} \quad (3)$$

$$Z(\omega) = K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i} \quad (4)$$

Eq. (4) is very difficult to use in logarithmic scale. Fortunately, Relations (5) allow one to compute GMM parameters from the parameters of PZF (see [23,24]). The proof of these relations is given in Appendix B.

$$\begin{cases} K_i = K_0 \prod_{h=1}^N \left( \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{\omega_{p,i} - \omega_{z,h}}{\omega_{p,i} + \omega_{p,h}(\delta_{ih} - 1)} \right) \\ C_i = \frac{K_i}{\omega_{p,i}} \end{cases} \quad (5)$$

Given a transfer function of GMM,  $Z(\omega) = |Z(\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$ , the modulus and the phase of the associated PZF are defined in

$$\begin{cases} |Z(\omega)| = K_0 \prod_{i=1}^N |Z(\omega)|_i = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{z,i})^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{p,i})^2}} \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega) = \sum_{i=1}^N \left( \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right) \right) \end{cases} \quad (6)$$

It is worth noticing that PZF can be generalized to fractional calculus. Then, Eq. (3) becomes Eq. (7). The modulus and phase of this fractional calculus Pole–Zero formulation (FCPZF) is given by Eq. (8). Thus, PZF is a particular case of the

<sup>1</sup> Standard linear solid is also called Zener model. It is a simple case of generalized Maxwell model where  $N=1$ .

FCPZF, where the derivation order is  $\gamma_i = 1$ . One could expect FCPZF to be equivalent to GFCMM of Table 1, but the link between these two formulations has not been established yet.

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})^{\gamma_i}}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})^{\gamma_i}} \quad (7)$$

$$\begin{cases} |Z(\omega)| &= K_0 \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 + 2(\omega/\omega_{z,i})^{\gamma_i} \cos(\gamma_i \pi/2) + (\omega/\omega_{z,i})^{2\gamma_i}}}{\sqrt{1 + 2(\omega/\omega_{p,i})^{\gamma_i} \cos(\gamma_i \pi/2) + (\omega/\omega_{p,i})^{2\gamma_i}}} \\ \varphi(\omega) &= \sum_{i=1}^N \tan^{-1} \left( \frac{(\omega/\omega_{z,i})^{\gamma_i} \sin(\gamma_i \pi/2)}{1 + (\omega/\omega_{z,i})^{\gamma_i} \cos(\gamma_i \pi/2)} \right) \\ &\quad - \tan^{-1} \left( \frac{(\omega/\omega_{p,i})^{\gamma_i} \sin(\gamma_i \pi/2)}{1 + (\omega/\omega_{p,i})^{\gamma_i} \cos(\gamma_i \pi/2)} \right) \end{cases} \quad (8)$$

## 2.2. Asymptotes of the PZF

Relations (6) are non-linear compared with frequency and make the identification difficult to carry out. Fortunately, it is possible to approach the behavior of PZF using the asymptotes of the modulus and the phase (see Vinh [2], Oustaloup [22], Dion [23,24]). The authors want to point out that thanks to Relation (6):  $\log(|Z(\omega)|) = \log(K_0) + \sum_{i=1}^N \log(|Z(\omega)|_i)$  and  $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega)$ . In statics, when the angular frequency is nil,  $\log(|Z(\omega=0)|) = \log(K_0)$  and  $\varphi(\omega=0) = 0$ . In dynamics, the behavior of PZF is the superposition of the behaviors of Pole–Zero couples. Each of these couples adds a non-linear contribution compared with frequency to the modulus and to the phase (see the following equations)

$$\begin{cases} \log(|Z(\omega)|_i) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right)^2 \right) \\ \varphi_i(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right) \end{cases} \quad (9)$$

At this point, we would like to define  $\chi = \log(\omega)$ , the logarithm of the angular frequency. Assuming an angular frequency far from the Zero and the Pole and taking the limit, Relations (9) tend towards the asymptotes given by Eqs. (10). These asymptotes are shown in Fig. 3. The curves generated by a Pole–Zero couple, as well as their asymptotes, are symmetrical around the medium angular frequency,  $\chi_{c,i} = \log(\sqrt{\omega_{z,i}\omega_{p,i}}) = (\chi_{z,i} + \chi_{p,i})/2$ .

$$\begin{aligned} \log(|Z(\chi)|_i) &\longrightarrow \log(|Z^{asy}(\chi)|_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } \chi < \chi_{z,i} < \chi_{p,i} \\ \log(\omega/\omega_{z,i}) = \chi - \chi_{z,i} & \text{if } \chi_{z,i} \leq \chi \leq \chi_{p,i} \\ \log(\omega_{p,i}/\omega_{z,i}) = \chi_{p,i} - \chi_{z,i} & \text{if } \chi_{z,i} < \chi_{p,i} < \chi \end{cases} \\ \varphi_i(\chi) &\longrightarrow \varphi_i^{asy}(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \chi < \chi_{z,i} < \chi_{p,i} \\ \pi/2 & \text{if } \chi_{z,i} \leq \chi \leq \chi_{p,i} \\ 0 & \text{if } \chi_{z,i} < \chi_{p,i} < \chi \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

It is worth noticing that the asymptote of the modulus is the primitive of the asymptote of the phase divided by  $\pi/2$  (see Eqs. (10) and Fig. 3). Considering the analogy between the asymptote of the phase and the derivative of the asymptote of the modulus with respect to  $\chi$ , we would like to define the stiffening,  $S$ , of a modulus and the area,  $A$ , under a phase curve. Given two angular frequencies,  $\omega_a$  and  $\omega_b$ ,  $S$  and  $A$  are defined thanks to Relations (11):

$$\begin{aligned} \forall \chi_a = \log(\omega_a) \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \chi_b = \log(\omega_b) \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} S(|Z|, \chi_a, \chi_b) = \int_{\chi_a}^{\chi_b} \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|Z(\chi)|) d\chi = \log(|Z(\chi_b)|) - \log(|Z(\chi_a)|) & \text{The stiffening} \\ A(\varphi, \chi_a, \chi_b) = \int_{\chi_a}^{\chi_b} \varphi(\chi) d\chi & \text{The area under the phase curve} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

The analogy between the phase and the derivative of the modulus allow one to get a useful relation between the stiffening and the area of the asymptotes of PZF (see Eq. (12)). Moreover, given two angular frequencies logarithms  $\chi_a < \chi_{z,i}$  and  $\chi_b > \chi_{p,i}$ , Eqs. (12) becomes  $S(|Z^{asy}(\chi)|_i, \chi_a, \chi_b) = 2/\pi \times A(\varphi_i^{asy}(\chi), \chi_a, \chi_b) = (\chi_{p,i} - \chi_{z,i})$ .

$$\forall \chi_a \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \chi_b \in \mathbb{R}, \quad S(|Z^{asy}(\chi)|_i, \chi_a, \chi_b) = \frac{2}{\pi} A(\varphi_i^{asy}(\chi), \chi_a, \chi_b) \quad (12)$$

The asymptotes present the advantage to be easy to manipulate and to be simultaneously representative of modulus and phase. Asymptotes allow one to perform simple graphical identification.

### 3. Existing methods

#### 3.1. The enclosing curve method

Vinh [2] has described a graphical method based on asymptotes (see Figs. 4 and 7). This consists in plotting two enclosing curves above and below the experimental modulus curve, here:  $|H(\omega)|_+ = |H(\omega)| \times 10^{0.06}$  and  $|H(\omega)|_- = |H(\omega)|/10^{0.06}$ . Then the two enclosing curves are linked alternatively by two types of curves: constant ones ( $f=a$ ) and linear one with a unitary slope ( $f = \log(\omega) + b$ ). The Zeros are given by the angular frequency where the linear segments cross the bottom curve and the Poles are given by the angular frequency where the linear segments cross the top curve. The closer to modulus are the enclosing curves, the better the model fits the modulus curve and the more it requires Pole–Zero couples. The parameters obtained with the enclosing curves method are listed in Table 4 in Appendix C.

Each linear segment is in fact the asymptotic behavior of a Pole–Zero couple. This old method shows how powerful it is to use asymptotic curves in the logarithmic scale instead of the non-linear modulus and phase relations in the linear scale. Oustaloup [22] has proposed the same kind of method for the phase curve. His method consists in equalizing the area under the experimental curve,  $\psi(\chi)$ , and the area between the model curve,  $\varphi(\chi)$ .

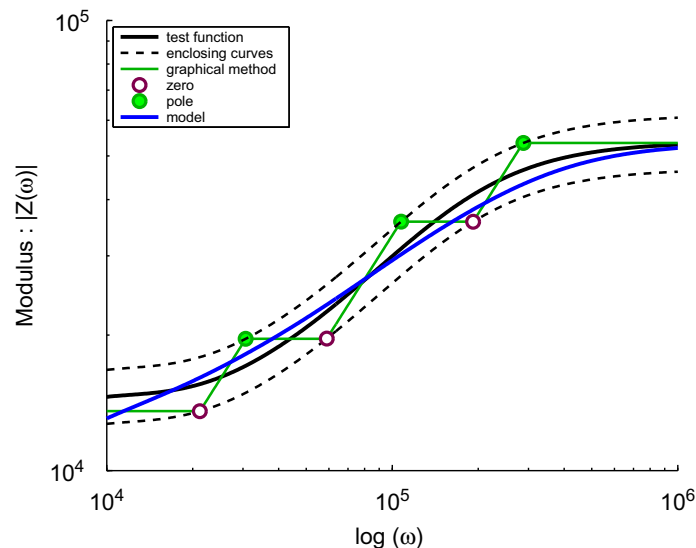
#### 3.2. The CRONE method

The CRONE method is described by Oustaloup [22] in his book. First, the number of Pole–Zero couples is defined to have at least one Pole–Zero couple per decade in the frequency domain, here we have eight couples for five decades. The frequency domain is divided into frequency subdomains,  $\chi \in [\chi_{a,i} \dots \chi_{a,i+1}]$ , one for each Pole–Zero couple, (see Fig. 5). The subdomains have the same length,  $\ell_i$ . In each subdomain, the area under the test curve is approached by the area of a rectangle whose height is the first phase value of the subdomain,  $\psi_i$ . It has to be equal to the area under the asymptotic curve of the model phase. Zeros are arbitrary placed on the left of subdomains, thus,  $\chi_{z,i+1} = \ell_i + \chi_{z,i}$ . Poles are placed in such a way that  $\chi_{p,i} = \chi_{z,i} + \alpha_i$ , with  $\alpha_i = \psi_i \ell_i \times 2/\pi$ .

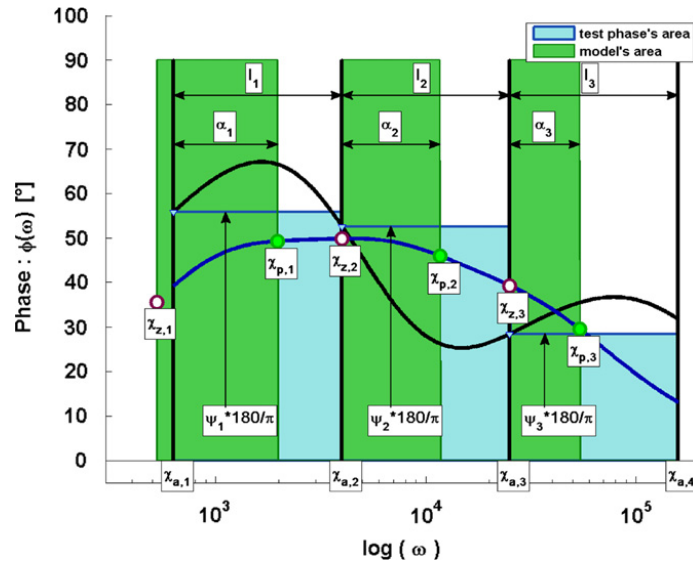
This method generates edge effects with a decreasing phase near the edge. To avoid it, the first Zero and the last Pole are corrected by an arbitrary value around 0.08 :  $\chi_{z,1}^{\text{corrected}} = \chi_{z,1} - 0.08$  and  $\chi_{p,\text{end}}^{\text{corrected}} = \chi_{p,\text{end}} + 0.08$ . This helps to increase the phase value of the first and the last Pole–Zero couple. Then in Fig. 5 the asymptotic area of the first subdomain begins on the left of it. As it is shown in Fig. 5, this method is not very accurate for non-smooth phase curves. The parameters of the method used to obtain Figs. 5 and 8 are listed in Table 5 in Appendix C.

#### 3.3. A test transfer function

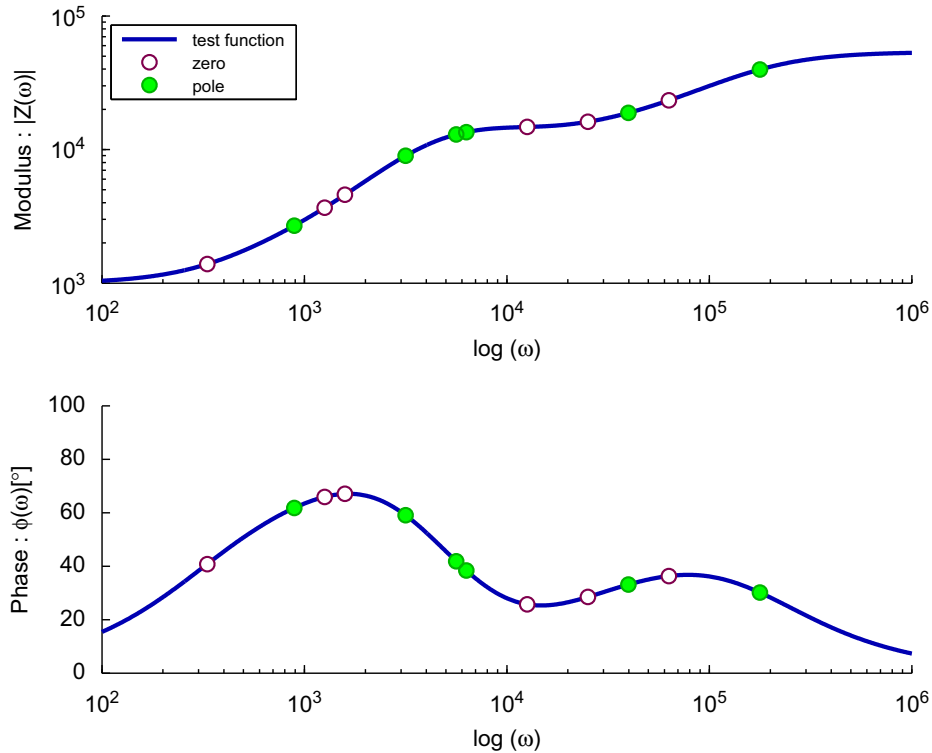
In order to benchmark the methods presented in this paper, it is useful to define a common transfer function with modulus and phase,  $H(\chi) = |H(\chi)|\exp(j\psi(\chi))$ . For this purpose we have chosen an arbitrary Pole–Zero function with big variations in order to test the robustness of the methods. The logarithm of the Zeros and Poles is presented in Table 2, and  $K_0 = 1000$ .



**Fig. 4.** Enclosing curves method allows identifying Poles and Zeros thanks to the enclosing curves of the modulus. The asymptotes are plotted between the two enclosing curves.



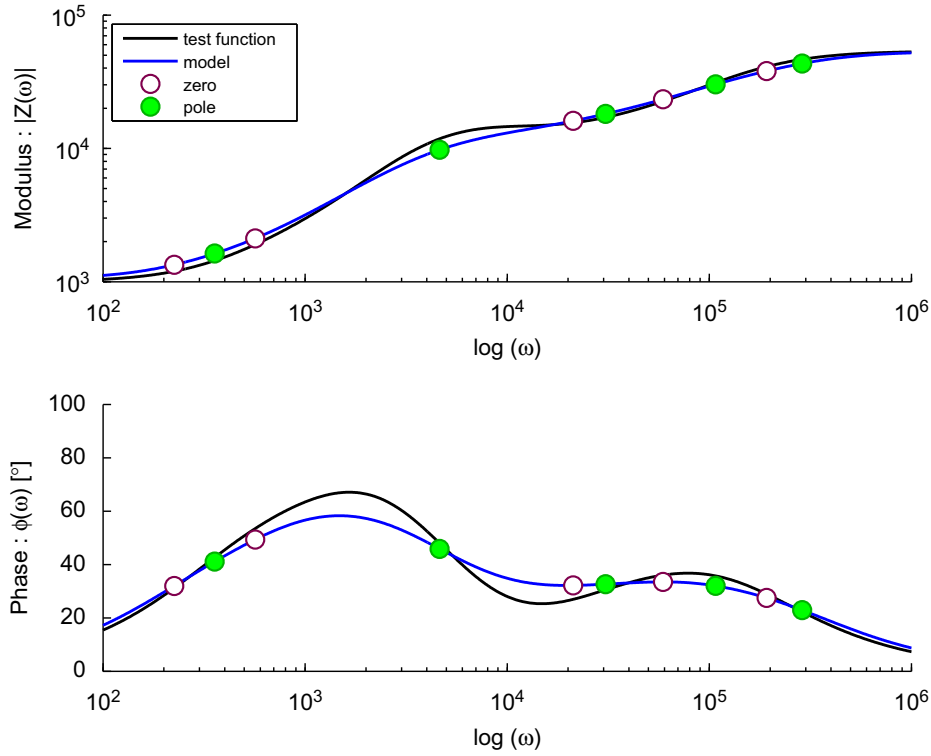
**Fig. 5.** CRONE's graphical method [22]. The areas under the asymptotes curve and under the test curve are equal. The width  $\alpha_i$  give the distance between Poles and Zeros.



**Fig. 6.** The modulus and the phase of the test transfer function used to compare identification methods. Particular attention should be paid on the fourth Pole–Zero couple which has been arbitrary taken to be non-causal (see Table 2).

It is worth noticing that a Pole–Zero couple with the Zero bigger than the Pole is not causal. Such a couple generates a decreasing modulus with a negative phase, what would mean that the material respond before the excitation. One can expect an identification method of viscoelastic properties to always give causal Pole–Zero couples, i.e. with a Zero lower than the Pole. In order to test the robustness of the methods with the test transfer function, its fourth Pole–Zero couple is not causal (see Table 2). Nevertheless, the transfer function, which is the sum of all couples behavior, is still globally causal with an increasing modulus and a positive phase (Fig. 6). It is worth noticing that for all methods, experimental curves are usually interpolated exponentially in the frequency domain for the modulus and linearly for the phase. This helps to treat values between experimentally measured points. The present test function is defined with 1000 points equally spaced in logarithmic scale between  $10^2$  and  $10^6$  rad/s. The subscript  $k$  will be used to refer to one of these points.





**Fig. 7.** Enclosing curves method. Pole–Zero couples are detailed in Table 4 in Appendix C. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 4.5\%$  and  $\delta_{\varphi} = 1.25\%$ .

### 3.4. Two fitting indicators

To compare the methods presented in this paper, two curves fitting indicators are defined, one for the modulus and one for the phase. The purpose is to quantify how good a model  $Z(\chi) = |Z(\chi)|\exp(j\varphi(\chi))$ , is able to fit an experimental transfer function  $H(\chi) = |H(\chi)|\exp(j\psi(\chi))$ . To be equivalent, these indicators must respect the analogy between the stiffening of the modulus asymptote and the area under the asymptote of the phase see Relation (12).

$$\delta_{|Z|} = \frac{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \left( \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|H(\chi)|) - \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|Z(\chi)|) \right)^2 d\chi}{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \left( \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|H(\chi)|) \right)^2 d\chi} \quad (13)$$

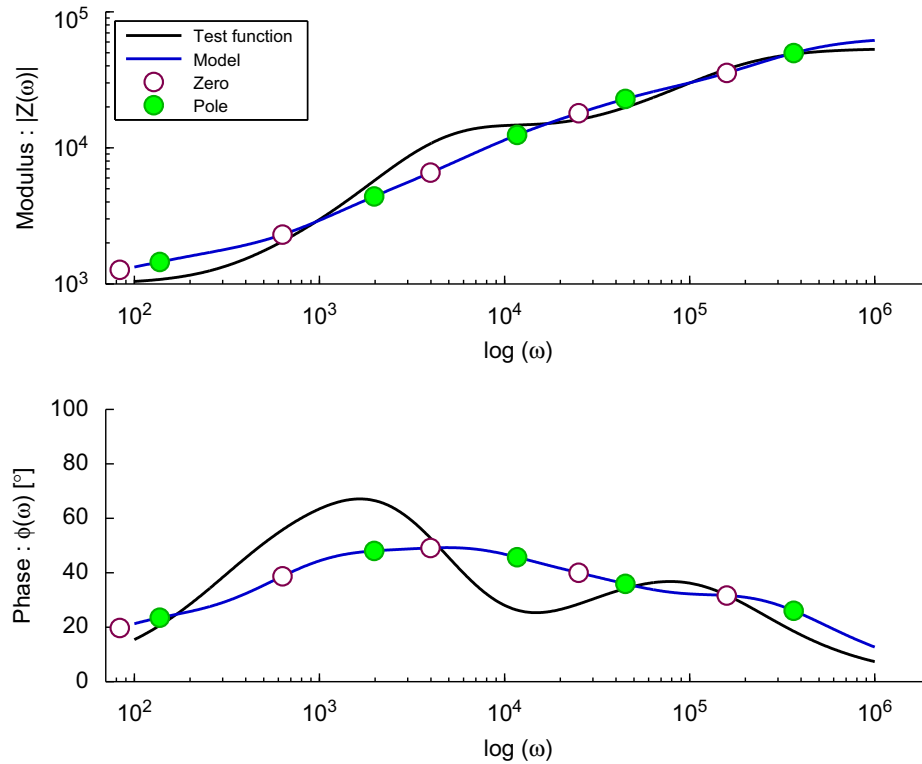
$$\delta_{\varphi} = \frac{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\psi(\chi) - \varphi(\chi))^2 d\chi}{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \psi(\chi)^2 d\chi} \quad (14)$$

Taking advantage of the definition of the stiffening as an integral in Eq. (11), the indicators are given in Eqs. (13) and (14). They are normalized to be dimensionless. A model curve that fits really well an experimental curve will exhibit a low indicator. These indicators only allow evaluating the identification of Poles and Zeros, but do not evaluate the identification of the static modulus,  $K_0$ . Thus, even if a GMM has low indicators, an offset can occur between the modulus of the GMM and the modulus of the experimental curve. Indeed, the offset between the two modulus curves is driven by the static modulus:  $K_0$ . This static modulus is chosen after the identification of Poles and Zeros. One can either set it before the identification and deals the offset with the first zero (see Section 4.2.2).

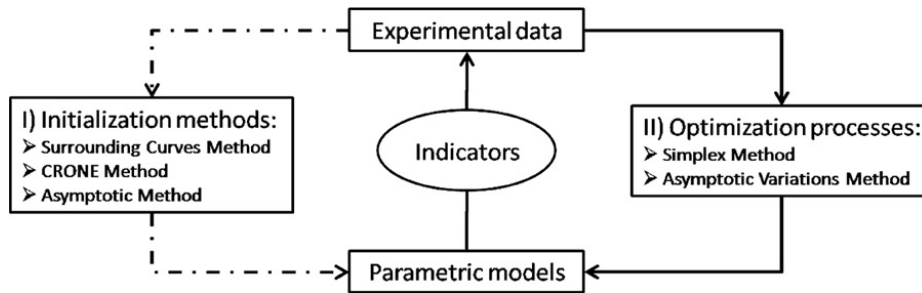
As the indicators of these two methods show (Figs. 7 and 8), the enclosing curves method gives better results than the CRONE method. But these results can be improved, furthermore, none of both methods allow identifying parameters from both modulus and phase curves.

## 4. The asymptotical variations method

Fig. 9 represents the identification process. This begins by an initialization of the parameters of the PZF. Three initialization methods are presented in this paper and they are detailed in Section 3 for the two firsts and in Section 4.1 for the last one. Given the initial parameters of the PZF, optimization processes allow one to improve the fitting of experimental curves. The indicators are used to quantify the quality of the identified parameters.



**Fig. 8.** CRONE's graphical method [22]. Pole–Zero couples are detailed in Table 5 in Appendix C. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 23.48\%$  and  $\delta_{\varphi} = 8.24\%$ .



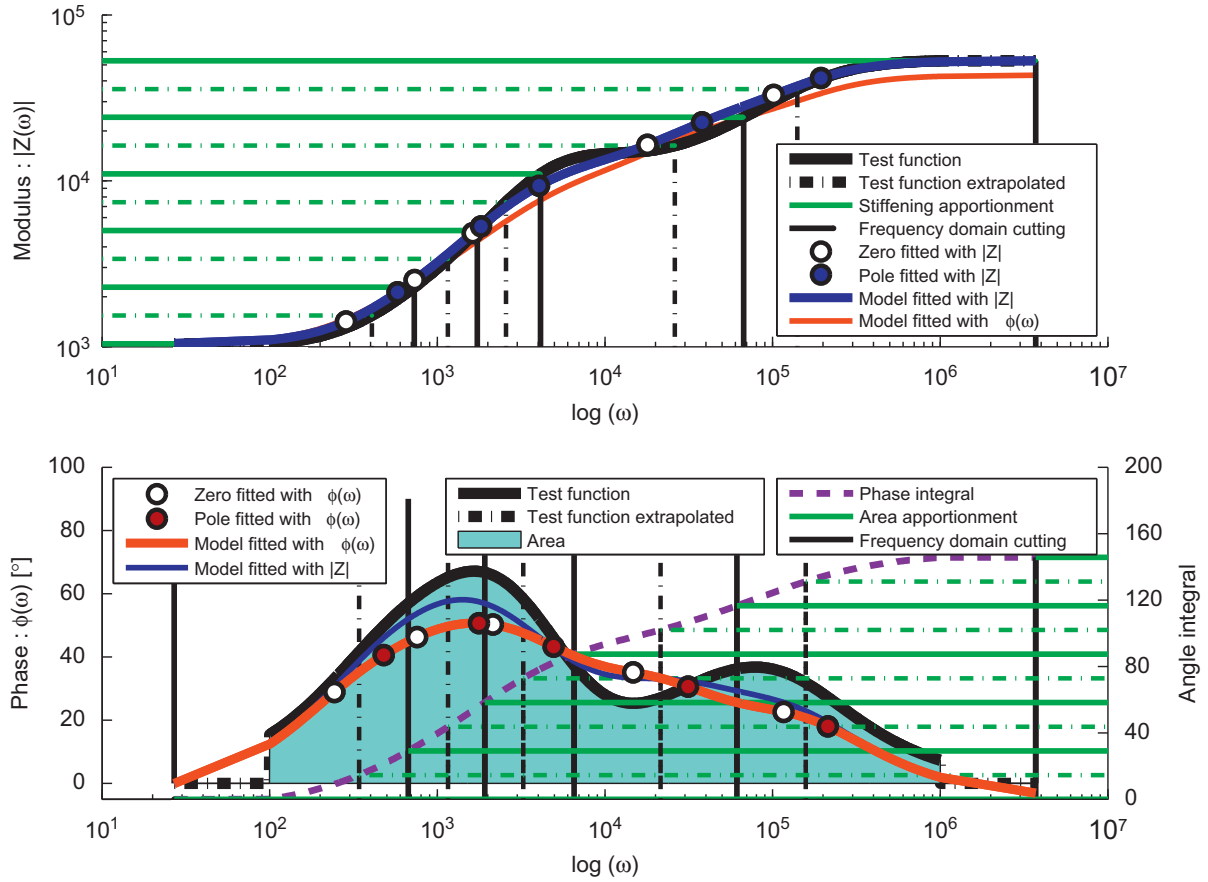
**Fig. 9.** The iterative identification process with three different methods for initialization and two methods for optimization.

#### 4.1. Initialization of the PZF parameters with a new graphical method

Given an experimental transfer function with modulus and phase, one can expect to use both of them for the identification of GMM parameters. The previous methods have already shown that these two kinds of curves content the same information. The next methods presented in this paper are described for the modulus and for the phase, then to manage the two kinds of value, the Poles and the Zeros will be the averaged with a weighting coefficient  $r$ :  $\omega_{z,i} = (1-r) \times \omega_{z,i}^{\text{modulus}} + r \times \omega_{z,i}^{\text{phase}}$  and  $\omega_{p,i} = (1-r) \times \omega_{p,i}^{\text{modulus}} + r \times \omega_{p,i}^{\text{phase}}$ . Here, the weight  $r$  will always be taken to 0.5. Moreover, in order to prevent edge effects, the test curves are extrapolated with a constant modulus and a null phase on about half a decade before and after the frequency domain.

Unlike the previous method already described by Oustaloup, the area under the phase is evaluated by the Trapezes Method (see Fig. 10). This helps to give better results when the transfer function is only known in a few points. Then Pole–Zero couples are placed according to the need of stiffening and phase. This is realized by dividing the frequency domain in  $N$  frequency subdomains, one for each Pole–Zero couple. Each of these subdomains,  $\chi \in [\chi_{a,i}, \chi_{b,i}]$ , has the same experimental stiffening

$$\alpha_i = \int_{\chi_{a,i}}^{\chi_{b,i}} \frac{d}{d\chi} [\log(|H(\chi)|)] d\chi = \log(|H(\chi_{b,i})|) - \log(|H(\chi_{a,i})|)$$



**Fig. 10.** A new graphical method using asymptotes to identify parameters on both modulus and phase curve. The parameters are detailed in Appendix C. The final parameters (see Table 8 and Fig. 11) are obtained by averaging the ones from the modulus curve (see Table 6) and from the phase curve (see Table 7).

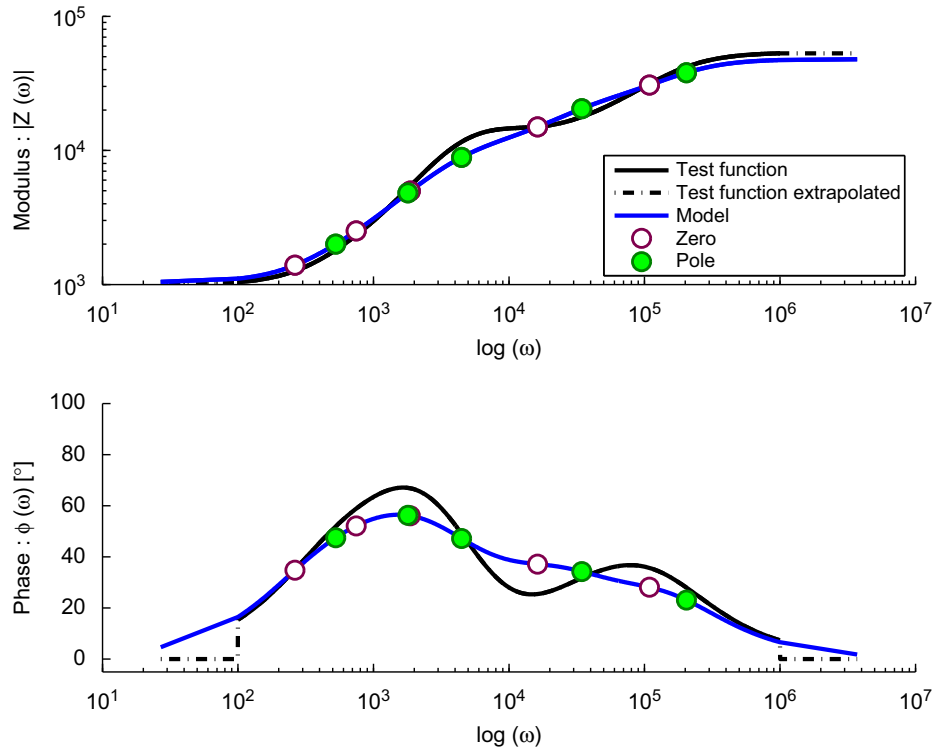
(see the modulus curve in Fig. 10) or the same area of phase,  $\alpha_i \pi / 2 = \int_{\chi_{a,i}}^{\chi_{b,i}} \psi(\chi) d\chi$ , (see the phase integral curve in Fig. 10). Thus, if high stiffening or high phase occurs in the vicinity of a frequency, then couples will concentrate around this frequency. In a subdomain, the medium frequency of a couple  $\chi_{c,i} = (\chi_{z,i} + \chi_{p,i})/2$ , is placed with respect to this principle. The medium frequency divides the subdomain into two parts of equal stiffening or area of phase. In Fig. 10, the stiffening or phase integral apportionment is represented by horizontal lines and the frequency domain apportionment by vertical lines, continuous lines separating subdomains and dashed lines denoting medium frequencies.

As in the previous method, the ratio  $\alpha_i$  is used to place the Zeros and the Poles, but here it is defined for both modulus and phase. The factor  $\alpha_i$  is the value calculated in a subdomain and it affects only the Pole–Zero couple of this subdomain. Because of the frequency domain apportionment, here  $\alpha_i$  is the same for all subdomains. Unfortunately, there are some cases where curves with big variations can produce very smooth fitted model. To avoid these cases,  $\alpha_i$  is weighted by a coefficient  $v_i$  which depends on the length of the subdomains. A short subdomain means that the phase or the slope of the stiffness is big, then a big  $v_i$  coefficient is required:

$$\begin{cases} \ell_{total} = \chi_{max} - \chi_{min} \\ \ell_i = \chi_{b,i} - \chi_{a,i} \\ v_i = \left( \frac{\ell_{total} - \ell_i}{\ell_{total}} \right) \left( \frac{N}{N-1} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \chi_{z,i} = \chi_{c,i} - \frac{v_i \alpha_i}{2} \\ \chi_{p,i} = \chi_{c,i} + \frac{v_i \alpha_i}{2} \end{cases} \quad (15)$$

Notice that  $\sum_{i=1}^N v_i = N$ , and that when all the subdomains have the same length, the weighting coefficients are  $v_i = 1$ . The results of this method are shown in Fig. 10. The blue curves are produced by a fitting on the test modulus curve, the Pole Zeros coefficients of such a model are shown in Table 6 in Appendix C. Table 7 lists the Pole Zeros coefficients of the model produced by a fitting on the test phase curve (red curves). The static modulus,  $K_0$ , in Eq. (3) is taken as the first value of the test modulus curve. Notice that all Zeros are lower than their associated Poles. Finally, the average Pole Zeros coefficients are shown in Table 8, they lead to the model plotted in Fig. 11.

This method allows improving the placement of the couples. It is better than the CRONE method but it is worse than the enclosing curve method which intrinsically places well couples. Nevertheless, this method uses both the modulus and



**Fig. 11.** The final results of the graphical method described in Section 4.1. The parameters are detailed in Table 8 in Appendix C. They have been averaged from the ones plotted on Fig. 10. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 8.87\%$  and  $\delta_{\varphi} = 2.57\%$ .

the phase. The values of the convergence indicators are lower for a fitting on the experimental modulus: 6.3% and 1.7% than for a fitting on the experimental phase: 12.31% and 3.8%. The averaged parameters score intermediate indicators: 8.87% and 2.57%. These indicators value are not so good, this means that the model is not close enough to the test curves especially for the test curve of phase (see Fig. 11). The results of this method can be optimized and they will be used as an initialization for the optimization processes proposed in the following sections.

#### 4.2. Optimization of identified parameters

Given a GMM with initial values for Poles and Zeros, some ways to optimize the fitting of experimental curves are described in this section. For this purpose, iterative methods are required. One can use the classical Newton–Raphson method to find the parameters leading to the least mean square value. This method does not work very well because of the existence of several local minima.

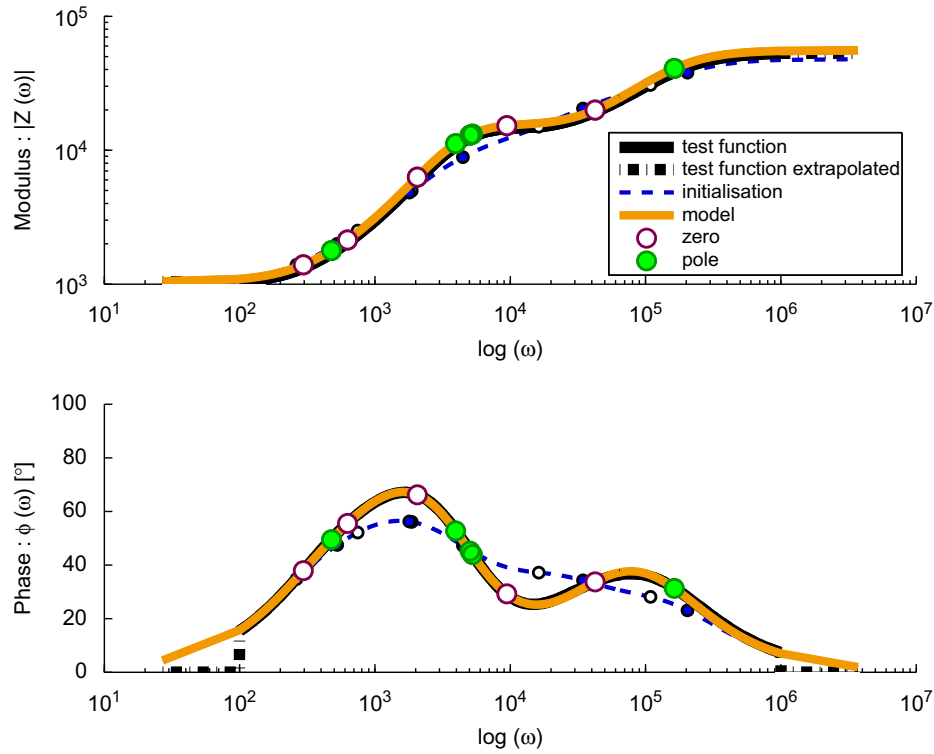
To overcome this difficulty, two optimization processes are presented here. First, a Matlab<sup>®</sup> function is used, it is based on the Nelder–Mead simplex method. Second, a new method based on the modulus and phase asymptotes is described. These asymptotes are used to translate the differences between the model and the experimental curves into step of variations.

##### 4.2.1. An unconstrained non-linear optimization algorithm

“fminsearch” is a Matlab<sup>®</sup> function based on the Nelder–Mead simplex method which convergence properties have been discussed by Lagarias et al. [25]. This method finds the minimum of a scalar-valued non-linear function  $W$  of  $n$  real variables, the Zeros and the Poles. For the present identification problem, this function will be defined as the weighted sum of the two indicators previously defined in Eqs. (13) and (14) (see Eq. (16)). This allows fitting both modulus and phase in the same time:

$$W = (1-r) \times \delta_{|Z|} + r \times \delta_{\varphi} \quad (16)$$

Although in general cases, taking the weighting coefficient  $r \neq 0.5$  gives better results, in the present paper,  $r$  has been taken to 0.5 for all methods in order to compare them. This was already the case in Section 4.1. The simplex method will be used to minimize  $W$ . The calculation time used by this method seems to be strongly dependent of the initial parameters. These initial parameters, where found by the method, described in Section 4.1 and are listed in Table 8 in Appendix C.



**Fig. 12.** The GMM obtained after the optimization of parameters given by the method described in Section 4.1 (see Table 8 in Appendix C). The optimization is proceeded thanks to a Matlab<sup>®</sup> function based on the Nelder–Mead simplex method. The optimized parameters are detailed in Table 9 in Appendix D. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 0.11\%$  and  $\delta_{\phi} = 0.03\%$ . Notice that the fourth Pole is lower than the fourth Zero, thus it is non-causal.

According to the indicators: 0.11% and 0.03%, this method gives very good results (Fig. 12). The parameters of this method are reported in Table 9 in Appendix D. Since it is an unconstrained method, non-causal Pole–Zero couples can occur like the fourth couple of Table 9 for which its Zero is greater than its Pole. Despite its good results, this method remains unconstrained and can lead to non-causal solutions.

#### 4.2.2. Optimization with the asymptotical variations method

The method described here allow constraining Pole–Zero couples to be causal, i.e. with the Zero smaller than the Pole. The principle of this method is to find each local difference between the experimental curves and the model curves in terms of stiffening or phase integral. These local differences are attributed to all different couples in function of their local weight. Local lack and excess of stiffening and integral of phase can be seen as a gradient integrated on a variable step. The asymptotes provide the simple relations for the translation of this variable step into parameter variations.

To compute the stiffening and the phase integral, the experimental curves are interpolated in logarithmic scale thanks to linear functions. After the interpolation, curves reach a rate of 100 points per decade. The subscript  $k$  will be used to denote these points. The interval between two successive points is a subdomain where integration is done with the Trapezes Method. In Figs. 13, 15 and 17 the interpolated modulus and phase are represented with a wide line.

While identifying the modulus, the relevant quantity to look at is the difference between the modulus slope of the experimental curve,  $d/d\chi[\log(|H(\chi)|)]$ , in dashed line in Fig. 13 and the modulus slope of the model,  $d/d\chi[\log(|Z(\chi)|)]$ , in dashed–dotted line in Fig. 13. Integrating this modulus slope in between two points,  $\omega \in [\omega_k, \omega_{k+1}]$ , provides the local stiffening:

$$\int_{\chi_k}^{\chi_{k+1}} \frac{d}{d\chi} [\log(|Z(\chi)|)] d\chi = \log(|Z(\chi_{k+1})|) - \log(|Z(\chi_k)|)$$

The local stiffening difference,  $\delta S_k$ , is defined by Eq. (17). In the upper part of Fig. 13, the model lack and excess of local stiffening are represented in painted area.

$$\delta S_k = \log \left( \frac{|Z(\chi_{k+1})| |H(\chi_k)|}{|Z(\chi_k)| |H(\chi_{k+1})|} \right) \quad (17)$$

Relation (10), describing the behavior of asymptotes of the model is used to convert the local differences of stiffening into parameter variations steps. These variations steps are shared between all couples in agreement with their local weight

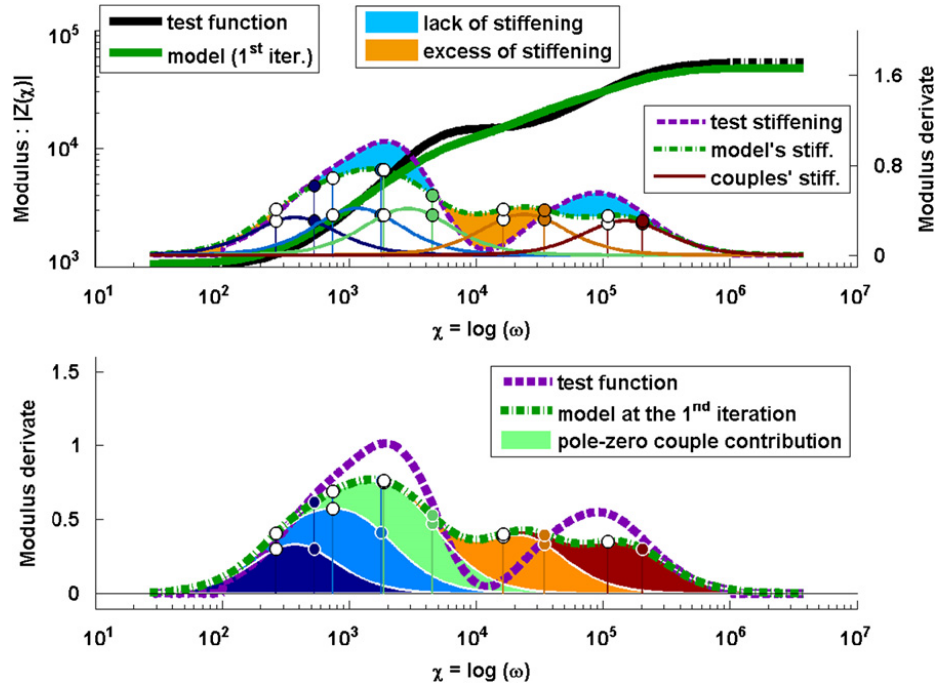


Fig. 13. Modulus of the test function and its derivative compared to the model's ones with the couple contributions during the 1st iteration.

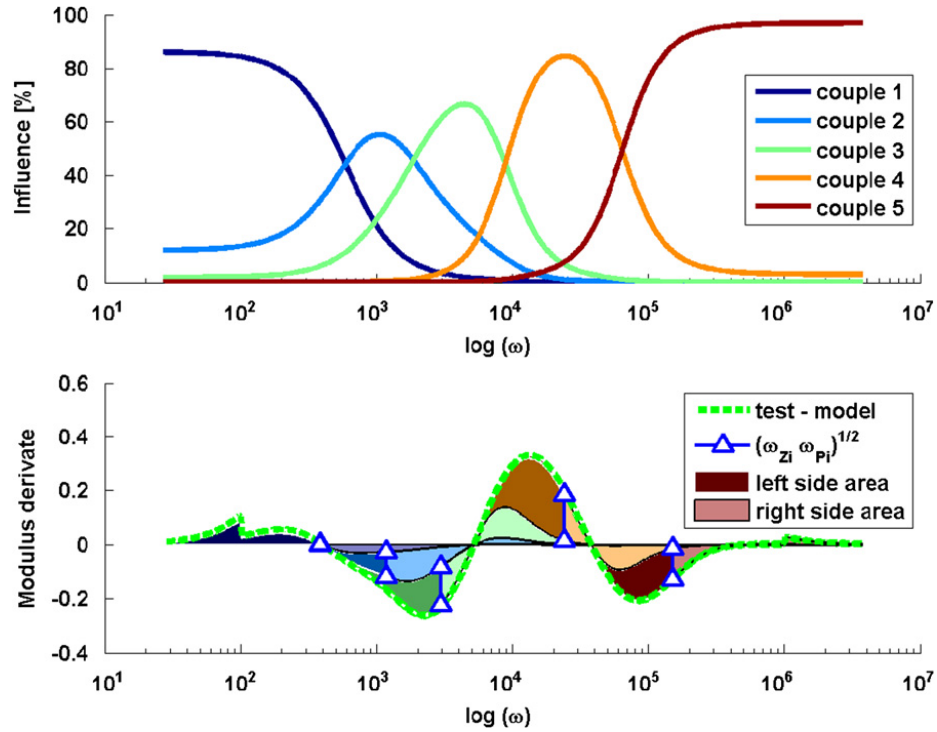


Fig. 14. Sharing between the Poles and the Zeros of the modulus derivative difference between the model and the test function.

in each subdomain. The local weight of a couple,  $l_{k,i}^{[Z]}$  is defined as the ratio of its local stiffening contribution to the model's local stiffening (Eq. (18)). The local stiffening contribution of the  $i$ th couple is  $\log(|Z(\chi_{k+1})|_i) - \log(|Z(\chi_k)|_i)$ , this is the difference between two successive points of the modulus logarithm generated by the  $i$ th couple (Eq. (9)).

$$l_{k,i}^{[Z]} = \frac{\log(|Z(\chi_{k+1})|_i) - \log(|Z(\chi_k)|_i)}{\log(|Z(\chi_{k+1})|) - \log(|Z(\chi_k)|)} \quad (18)$$

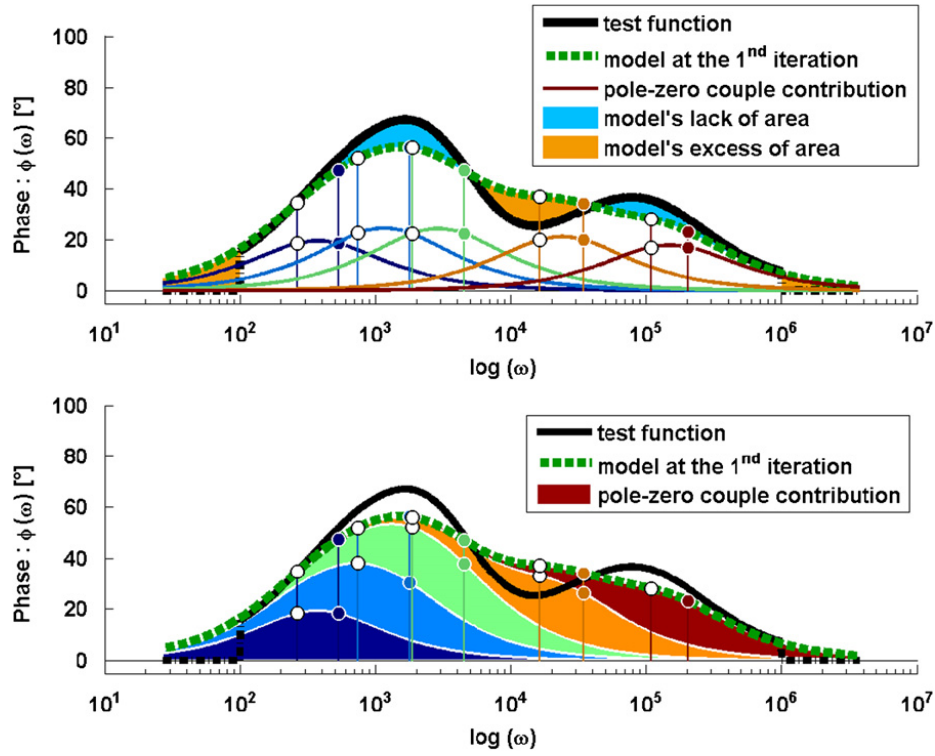


Fig. 15. Phase of the test function compared to the model's phase with the couple contributions during the 1st iteration.

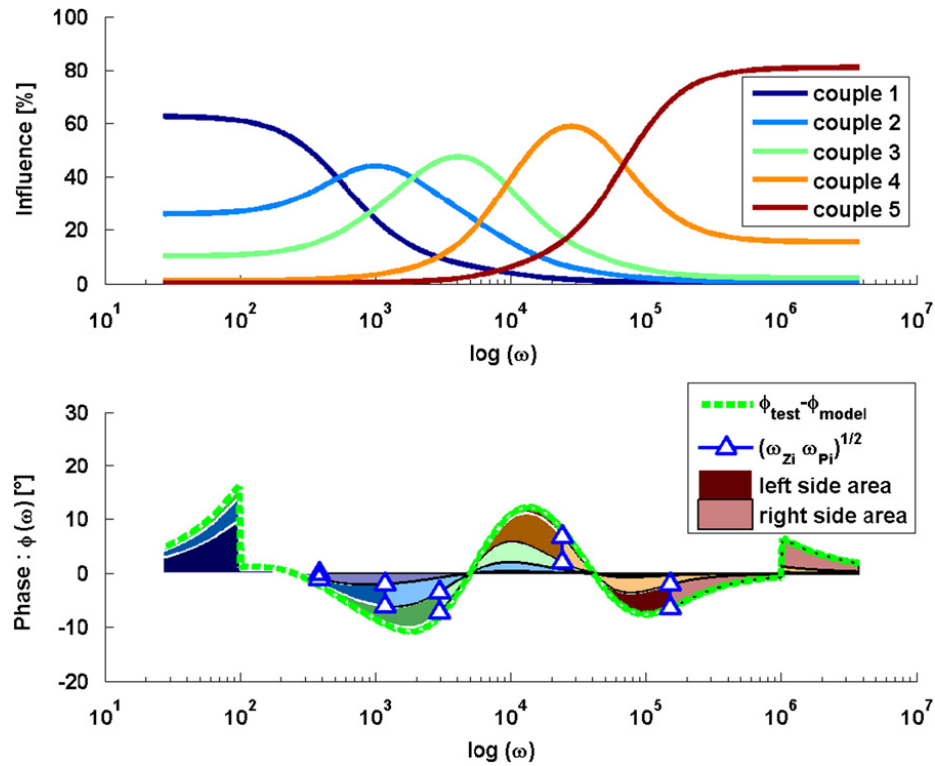
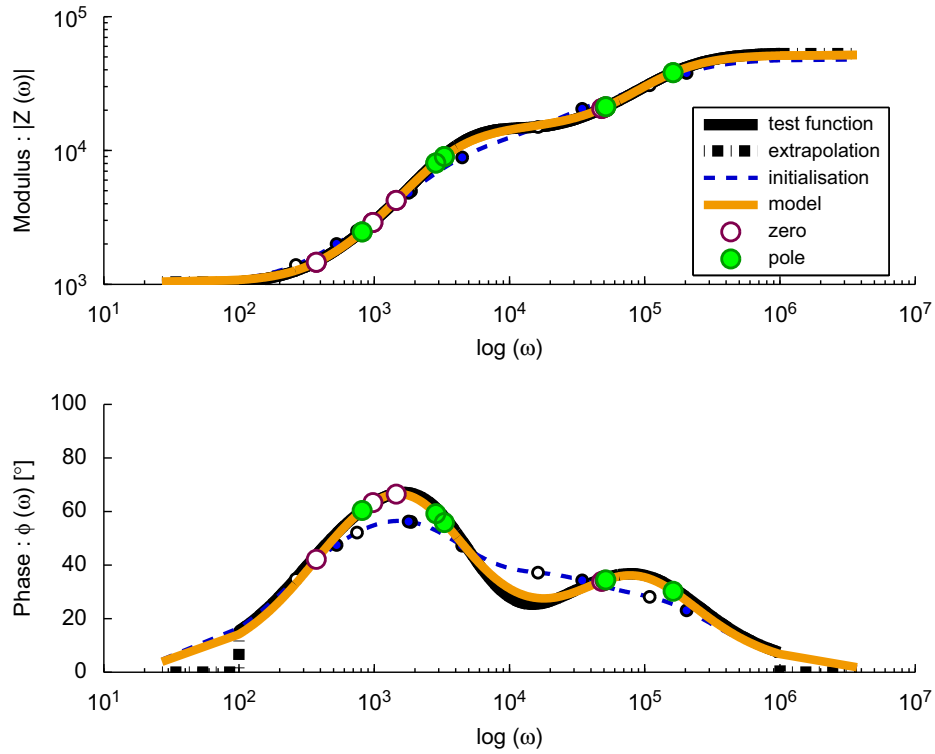


Fig. 16. Sharing between the Poles and the Zeros of the phase difference between the model and the test function.

Fig. 13 shows, in its upper part, the contribution of each particular couple to the derivative of the modulus,  $d/d\chi[\log(|Z(\chi_k)|_i)]$ , and, in the lower part, the derivative of the modulus,  $d/d\chi[\log(|Z(\chi_k)|)]$ , as the sum of all couple contributions. The influence curves of each Pole–Zero couple are shown in the upper part of Fig. 14. Notice that for each





**Fig. 17.** The GMM obtained after the optimization of parameters given by the method described in Section 4.1 (see Table 8 in Appendix C). The optimization is proceed thanks to the method, described in Section 4.2.2, using asymptotes to translate model deviations from the test curves into parameters steps. The optimized parameters are detailed in Table 10 in Appendix D. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 0.77\%$  and  $\delta_{\varphi} = 0.15\%$ .

couple, the peak of influence occurs in the vicinity of its medium frequency,  $\chi_{c,i}$ . These medium frequencies are represented in the lower part of Fig. 14 with the local stiffening difference,  $\delta S_k$  (Eq. (17)). In each subdomain, this difference already shared between couples according to their influence must be shared again between the Pole and the Zero of a couple. The sum of stiffening difference occurring in subdomains on the left of the medium frequency is attributed to the Zero and the sum of the ones of the right is attributed to the Pole (see Eq. (19)). Thus at each iteration step denoted by the superscript  $u$ , the parameters are changed according to the lack and excess of stiffening.

$$\begin{cases} \chi_{z,i}^{\text{modulus}} = \chi_{z,i}^u - \sum_{\chi_k \leq \chi_{c,i}} I_{k,i}^{|Z|,u} \delta S_k^u \\ \chi_{p,i}^{\text{modulus}} = \chi_{p,i}^u + \sum_{\chi_{c,i} < \chi_k} I_{k,i}^{|Z|,u} \delta S_k^u \end{cases} \quad (19)$$

The way to identify the phase curve is analogous. The relevant quantity to look at is the difference between the phase of the experimental curve,  $\psi(\chi)$ , in continuous line in Fig. 15 and the phase of the model curve,  $\varphi(\chi)$ , in dashed line in Fig. 15. Integrating this phase between two points,  $\omega \in [\omega_k, \omega_{k+1}]$ , provides the local area of phase:  $\int_{\chi_k}^{\chi_{k+1}} \varphi(\chi) d\chi = (\varphi(\chi_{k+1}) + \varphi(\chi_k))/2$ . The local area of phase difference,  $\delta A_k$ , is defined by Eq. (20). The model lack and excess of area of phase are represented in painted area.

$$\delta A_k = \frac{\psi(\chi_{k+1}) + \psi(\chi_k) - \varphi(\chi_{k+1}) - \varphi(\chi_k)}{2} \quad (20)$$

Relation (10), describing the behavior of asymptotes of the model will be used to convert the local differences into parameter variations step. These variations steps are shared between all couples in agreement with their local weight in each subdomain. The local weight of a couple,  $I_{k,i}^{\varphi}$  is defined as the ratio of its local area of phase contribution to the model's local area of phase (Eq. (21)). The local area of phase contribution of the  $i$ th couple is  $(\varphi_i(\chi_{k+1}) + \varphi_i(\chi_k))/2$ , this is the integral of phase between two successive points of the phase generated by the  $i$ th couple (Eq. (9)).

$$I_{k,i}^{\varphi} = \frac{\varphi_i(\chi_{k+1}) + \varphi_i(\chi_k)}{\varphi(\chi_{k+1}) + \varphi(\chi_k)} \quad (21)$$

Fig. 15 shows, in its upper part, the phase contribution of each particular couple  $\varphi_i(\chi)$  and, in the lower part, the model phase,  $\varphi(\chi)$ , as the sum of all couple contributions. The influence curves of Pole–Zero couple are shown in the upper part of Fig. 16. Notice that for each couple, the peak of influence occurs in the vicinity of its medium frequency,  $\chi_{c,i}$ . These medium frequencies are represented in the lower part of Fig. 16 with the local area of phase difference,  $\delta A_k$  (see Eq. (20)). In each



subdomain, this difference already shared between couples according to their weight must be shared again between the Pole and the Zero of a couple. The sum of area of phase difference occurring in subdomains on the left of the medium frequency is attributed to the Zero and the sum of the ones of the right is attributed to the Pole (see Eq. (22)). Thus at each iteration step denoted by the superscript  $u$ , the parameters are changed according to the lack and excess of area of phase.

$$\begin{cases} \chi_{z,i}^{\text{phase}} = \chi_{z,i}^u - \frac{2}{\pi} \sum_{\chi_k \leq \chi_{c,i}} I_{k,i}^{\varphi,u} \delta A_k^u \\ \chi_{p,i}^{\text{phase}} = \chi_{p,i}^u + \frac{2}{\pi} \sum_{\chi_{c,i} < \chi_k} I_{k,i}^{\varphi,u} \delta A_k^u \end{cases} \quad (22)$$

The sharing of differences between couples in function of their weight has the advantage to only affects couples close to a local deviation, thus it does not disturb couples without any weight. The sharing of differences between Pole and Zero, in function of the position of a subdomain to the medium frequency, allows two different kinds of parameters behavior during iteration. First, the medium frequency of a Pole–Zero couple can move in frequency without any change of the relative position of the Pole to the Zero. It seems that the whole couple is moving in frequency. The second behavior has a standstill medium frequency while the coefficient Pole and the Zero are changing their value. This behavior induces the growth or the decrease of the whole couple.

The parameters found according to modulus and phase are averaged as in the previous method:  $\omega_{z,i} = (1-r) \times \omega_{z,i}^{\text{modulus}} + r \times \omega_{z,i}^{\text{phase}}$ , with  $r=0.5$  and the static modulus,  $K_0$ , defined in Eq. (3) is taken as the first value of the test modulus curve. The method described here for the modulus allows fitting its derivative. Thus, although the global form of the modulus is respected, an offset always occurs between the model and the test function. To remove this offset, the first Zero is modified according to the mean distance between the two curves:

$$\chi_{z_0}^{u+1} = \chi_{z_0}^u - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^V \log(|H(\chi_k)|) - \log(|Z^u(\chi_k)|)$$

Indeed, this means distance can be seen as a stiffening. Moreover, the causality is verified at each iteration. If the Zero of one couple is bigger than its Pole then their values are forced, for example,  $\chi_{p,i} - \chi_{z,i} = 10^{-6}$  centred on the medium frequency. Notice that such a couple is superfluous for the model since it does not produce any phase or stiffening. Finally, the problem of edge effects have already been treated by the extrapolation of tests curves. If for some reasons the medium frequency of a couple would step out the frequency domain, a virtual medium frequency would be defined inside the frequency domain in order to allow the computation of Eqs. (19) and (22).

The iterative process stops when the maximum parameter step,  $\delta_{ZP\max}^u = \max(|\chi_{z,i}^{u+1} - \chi_{z,i}^u|, |\chi_{p,i}^{u+1} - \chi_{p,i}^u|)$  is smaller than a defined value,  $\varepsilon = 10^{-3}$  for example, or after a certain amount of iteration, 125 for example. For robustness, the maximum parameter step is imposed to be smaller than the previous one:  $\delta_{ZP\max}^u \leq \delta_{ZP\max}^{u-1}$ . If it is not the case all parameter steps are normalized by multiplying per  $\delta_{ZP\max}^{u-1} / \delta_{ZP\max}^u$ . During the first iteration, this step limitation is initialized to a certain value, 0.25 for example.

This method gives good results (see Fig. 17), and the indicators prove it: 0.77% and 0.15%, moreover, the causality is respected for all Pole–Zero couples (see Table 10 in Appendix D). Finally, this method is a little bit faster than the simplex method one.

## 5. Conclusion and perspectives

Generalized Maxwell model (GMM) can be expressed with a Pole–Zero formulation (PZF). In logarithmic scale this formulation is a superposition of Pole–Zero couple behavior. These behaviors are non-linear against frequency and it is easier to manipulate the asymptotes to approach the value of stiffening and integral of phase. The new identification method presented in this paper is split into two parts, initialization of parameters and optimization.

The initialization places the medium frequencies of Pole–Zero couples in the frequency domain such that they are equally distant according to stiffening and integral of phase. Thus, the couples are placed where they are most needed. The stiffening and area of phase are translated into parameter steps: distance between Pole and Zero of each couple, thanks to the relations of asymptotes. This gives the initialized parameters of the GMM. Then they are optimized by considering each local deviation between the model and the experimental curve. Each local deviation is translated into parameter step thanks to asymptotes. The steps are shared between couples in function of their local weight. Then they are shared between Poles and Zeros in function of the position of the local deviation compared to the medium frequency of the couple. Iterating until the parameters steps become too small provides the optimized parameters.

This new method is very efficient for the identification of a Pole–Zero formulation according to both modulus and phase curves. It is neither restricted to viscoelasticity nor to the GMM. A very analogous version of this method could be applied to identify the parameters of a fractional calculus Pole–Zero formulation (FCPZF). Indeed the only difference would be the asymptotic value. Given a derivation order,  $\gamma_i$  and considering Eq. (8), the stiffening and the integral of phase of one Pole–Zero couple's asymptotes become for a FCPZF, respectively,  $S_i = \gamma_i \times (\chi_{p,i} - \chi_{z,i})$  and  $A_i = \gamma_i \times \pi/2 \times (\chi_{p,i} - \chi_{z,i})$ .

The advantage of this method is the possibility to constrain the parameters. In the present case of viscoelasticity, for the seek of causality, Zeros were constrained to be smaller than their Pole. Although this method is very quick and efficient, some

improvements would still be possible. It is possible that the Zero of a couple would become close but different to its Pole. In such a situation the contribution of this couple is very low inducing very low step variation because of the weighting parameters. That means that it will be difficult to modify this kind of couple. This problem can be solved by adding a constant to the weighting coefficient,  $I_{k,i}^Z$  and  $I_{k,i}^P$ . This constant would be equal for all couples, for example:  $\zeta = 1/N$ .

Other improvements can be done when, for some reasons, a Zero tends to be equal to a Pole. In this case the behavior of the Zero is exactly cancelled by the behavior of the Pole. In that case, the number of Pole–Zero couples to identify can be reduced. One other possibility is to suppress this couple and to replace it by another one located in the frequency region with the highest deviations.

## Acknowledgements

The authors wish to thanks Thierry Pasquet and Remi Lemaire from the CSB division, NVH department of Robert Bosch France for their technical and financial help.

## Appendix A. Rheological models

Table 3.

**Table 3**  
Classical rheologic model.

Model	Parameters value
Complex modulus	$K=100$ and $\eta=0.5$
Maxwell	$K=250$ and $C=2.5 \times 10^{-5}$
Kelvin–Voigt	$K=2.5$ and $C=2.5 \times 10^{-3}$
Generalized Maxwell model	$\left\{ \begin{array}{l} \text{with } K_0 = 9.3072 \\ K_1 = 7.8211 \text{ and } C_1 = 1.551 \times 10^{-3} \\ K_2 = 46.3241 \text{ and } C_2 = 0.4646 \times 10^{-3} \\ K_3 = 65.8711 \text{ and } C_3 = 0.0631 \times 10^{-3} \end{array} \right.$
Generalized fractional calculus Maxwell	$\left\{ \begin{array}{l} \text{with } K_0 = 7.746 \text{ and } \gamma_1 = 2/3 \\ K_1 = 100 \text{ and } C_1 = 0.02 \end{array} \right.$

## Appendix B. The parameters of GMM in function of the parameters of PZF

The proof of Relations (5) is given below. It allows linking a Pole–Zero formulation to a generalized Maxwell model. Starting from a Pole–Zero formulation:

$$Z(j\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1+j\omega/\omega_{z,i}}{1+j\omega/\omega_{p,i}} = K_0 j\omega \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{1}{j\omega} \prod_{i=1}^N \frac{j\omega + \omega_{z,i}}{j\omega + \omega_{p,i}} \right)$$

$Z(j\omega)$  can be expressed as a sum of fractions:

$$Z(j\omega) = K_0 j\omega \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{A_0}{j\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j\omega + \omega_{p,i}} \right)$$

Considering the following relation:

$$\frac{A_0}{j\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j\omega + \omega_{p,i}} = \frac{1}{j\omega} \prod_{i=1}^N \frac{j\omega + \omega_{z,i}}{j\omega + \omega_{p,i}}$$

The coefficient  $A_0$  is obtained by multiplying the previous relation by  $j\omega$  and taking  $j\omega = 0$ . The coefficients  $A_i$  are obtained by multiplying the previous relation by  $(j\omega + \omega_{p,i})$ , and taking  $j\omega = -\omega_{p,i}$ :

$$A_0 = \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{z,h}}{\omega_{p,h}} \quad \text{and} \quad A_i = \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{z,h} - \omega_{p,i}}{\omega_{p,h}(1 - \delta_{ih}) - \omega_{p,i}} \quad \forall i \in [1..N] \quad (23)$$

By replacing Eqs. (23) into the Pole–Zero formulation, one obtains

$$Z(j\omega) = K_0 j\omega \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{A_0}{j\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j\omega + \omega_{p,i}} \right) = K_0 + K_0 \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \sum_{i=1}^N \frac{j\omega A_i}{j\omega + \omega_{p,i}}$$

Then by comparing the above relation with the generalized Maxwell model, one is able to identify the coefficients  $K_{stk}$ ,  $K_i$  and  $C_i$ , see Eq. (24):

$$Z(\omega) = K_{stk} + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i}$$

Thus, Eqs. (5) are retrieved

$$\begin{cases} K_{stk} = K_0 \\ K_i = K_0 \prod_{h=1}^N \left( \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \frac{\omega_{z,h} - \omega_{p,i}}{\omega_{p,h}(1 - \delta_{ih}) - \omega_{p,i}} \right) \\ C_i = \frac{K_i}{\omega_{p,i}} \end{cases} \quad (24)$$

### Appendix C. Parameters values obtained with initialization methods

Tables 4–8.

**Table 4**

Poles and Zeros list with the enclosing curves method.

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.3524	2.7528	4.3263	4.7708	5.2833
$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.5526	3.6657	4.4865	5.0310	5.4595
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.2002	0.9129	0.1602	0.2603	0.1762

**Table 5**

Poles and Zeros list with CRONE's graphical method using phase's asymptotes.

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{phase}}$	1.9208	2.8000	3.6000	4.4000	5.2000
$\chi_p _{\text{phase}}$	2.1370	3.2956	4.0674	4.6529	5.5618
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{phase}}$	0.2162	0.4956	0.4674	0.2529	0.3618

**Table 6**

Poles and Zeros list with the new graphical method applied to the modulus curve.

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.4554	2.8652	3.2120	4.2537	5.0071
$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.7630	3.2604	3.6071	4.5796	5.2890
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.3077	0.3952	0.3952	0.3259	0.2819

**Table 7**

Poles and Zeros list with the new graphical method applied to the phase curve.

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{phase}}$	2.3860	2.8798	3.3314	4.1681	5.0654
$\chi_p _{\text{phase}}$	2.6807	3.2485	3.6940	4.4963	5.3297
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{phase}}$	0.2947	0.3688	0.3627	0.3282	0.2643

**Table 8**

Poles and Zeros list with the new graphical method applied to both the modulus and the phase curves, taking the mean value weighted with  $r=0.5$ .

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z$	2.4207	2.8725	3.2717	4.2109	5.0362
$\chi_p$	2.7218	3.2545	3.6506	4.5379	5.3093
$\chi_p - \chi_z$	0.3012	0.3820	0.3789	0.3271	0.2731

## Appendix D. Parameters values obtained with optimization methods

Tables 9 and 10.

**Table 9**

Poles and Zeros list with fminsearch optimization.

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z$	2.4707	2.7978	3.3134	4.6268	3.9743
$\chi_p$	2.6792	3.5962	3.7026	3.7209	5.2124
$\chi_p - \chi_z$	0.2085	0.7984	0.3892	–0.9059	1.2381

**Table 10**

Poles and Zeros list with the new method using the gradient of asymptotes with variable step and  $K_0=1000$ .

Pole–Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z$	2.5726	2.9975	3.1630	4.6855	4.7029
$\chi_p$	2.9198	3.5205	3.4539	4.7131	5.2103
$\chi_p - \chi_z$	0.3472	0.5230	0.2910	0.0276	0.5074

## References

- [1] J.D. Ferry, Viscoelastic Properties of Polymers, John Wiley & Sons, 1961.
- [2] T. Vinh, Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique, Mémorial de l'artillerie française 3ème fascicule, 1967.
- [3] M. Caputo, F. Mainardi, Linear models of dissipation in anelastic solids, in: I.P. Society (Ed.), La Rivista del Nuovo Cimento (1971–1977), vol. 1, Italian Physical Society, 1971, pp. 161–198.
- [4] R.S. Lakes, Viscoelastic Solids, CRC Press, 1999.
- [5] Y. Chevalier, J.T. Vinh, Mechanics of Viscoelastic Materials and Wave Dispersion, vol. 1, ISTE and John Wiley & Sons, 2010.
- [6] E. Balmès, J.-M. Leclère, Viscoelastic vibration toolbox, SDTools, Paris, 2009.
- [7] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, Transient responses of polymers and elastomers deduced from harmonic responses, Journal of Sound and Vibration 205 (1997) 185–203.
- [8] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, T. Beda, C. Esteoule, Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies, Journal of Sound and Vibration 205 (1997) 167–184.
- [9] L. Gaul, P. Klein, S. Kemple, Damping description involving fractional operators, Mechanical Systems and Signal Processing 5 (1991) 81–88.
- [10] R.C. Koeller, Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, Journal of Applied Mechanics 51 (1984) 299–307.
- [11] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus Mathematics in Science and Engineering, vol. 111, Academic Press, 1974.
- [12] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, 1999.
- [13] R.L. Bagley, P.J. Torvik, On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, Journal of Rheology 30 (1986) 133–155.
- [14] A. Lion, Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives, Archives of Mechanics 53 (2001) 253–273.
- [15] A. Lion, On the thermodynamics of fractional damping elements, Continuum Mechanics and Thermodynamics 9 (1997) 83–96.
- [16] N. Heymans, Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behaviour of polymers, Nonlinear Dynamics 38 (2004) 221–231.
- [17] H. Oberst, K. Frankenfeld, Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer, Acustica 2 (1952) 181–194.
- [18] J. Zhang, C.M. Richards, Parameter identification of analytical and experimental rubber isolators represented by maxwell models, Mechanical Systems and Signal Processing 21 (2007) 2814–2832.
- [19] D. Castello, F. Rochinha, N. Roitman, C. Magluta, Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables, Mechanical Systems and Signal Processing 22 (2008) 1840–1857.
- [20] A. de Lima, D. Rade, F.L. Neto, An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring, Mechanical Systems and Signal Processing 23 (2009) 1272–1281.
- [21] T. Chen, Determining a Prony Series for a viscoelastic material from time varying strain data, Technical Report, NASA, 2000.
- [22] A. Oustaloup, La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entier, Hermès, 1991.
- [23] J.-L. Dion, Modélisation et identification du comportement dynamique de liaisons hydro-élastiques, Ph.D. Thesis, ISMCM, Saint-Ouen, 1995.
- [24] J. Dion, S. Vialard, Identification of rubber shock absorber mounts, Mécanique industrielle et matériaux 50 (1997) 232–237.
- [25] J. Lagarias, J. Reeds, M. Wright, P. Wright, Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions, SIAM Journal on Optimization 9 (1998) 112–147.



**DETC2011-47545**

**DRAFT: VISCOELASTICITY MEASUREMENT AND IDENTIFICATION OF  
VISCOELASTIC PARAMETRIC MODELS**

**Franck Renaud**  
**Gael Chevallier**  
**Jean-Luc Dion**  
LISMMA-EA2336  
ISMEP (Supmeca)  
Saint-Ouen 93400  
France

Email: franck.renaud@supmeca.fr

**Rémi Lemaire**  
Bosch CB/ETF4  
Drancy 93700  
France

**ABSTRACT**

*Generally speaking, the behaviour of viscoelastic material is more complicated than the behaviour proposed by classical models as Voigt, Maxwell or Zener. The stiffness of such materials is a frequency dependent complex function. Above 1000Hz, classical measurements techniques are unable to achieve accurate measurements of the stiffness. In this paper, a new Dynamical Mechanical Analysis (DMA) tester is presented. It allows the characterization of the shear stiffness of preloaded viscoelastic materials between 200 and 3500Hz and without using frequency-temperature equivalences. Then the Generalized Maxwell model is used to describe behaviours measured with the DMA tester. A new iterative identification method of the parameter of the Generalized Maxwell model is described. This identification method is based on the asymptotes of the model.*

**NOMENCLATURE**

$\sigma$  Stress.  
 $\varepsilon$  Strain.  
 $h(t)$  Relaxation function.  
 $\delta X$  Displacement.  
 $N$  Force factor.  
 $\delta V$  Tension.

$F$  Force.  
 $Q$  Power of the driver.  
 $f$  Frequency of excitation.  
 $C_e$  Electrical capacity.  
 $M$  Mass.  
 $K$  Stiffness.  
 $C$  Damping.  
 $\omega$  Angular frequency.  
 $\chi = \log(\omega)$  Logarithm of the angular frequency.  
 $\omega_p$  Pole.  
 $\omega_z$  Zero.  
 $S$  Stiffening.  
 $A$  Area.

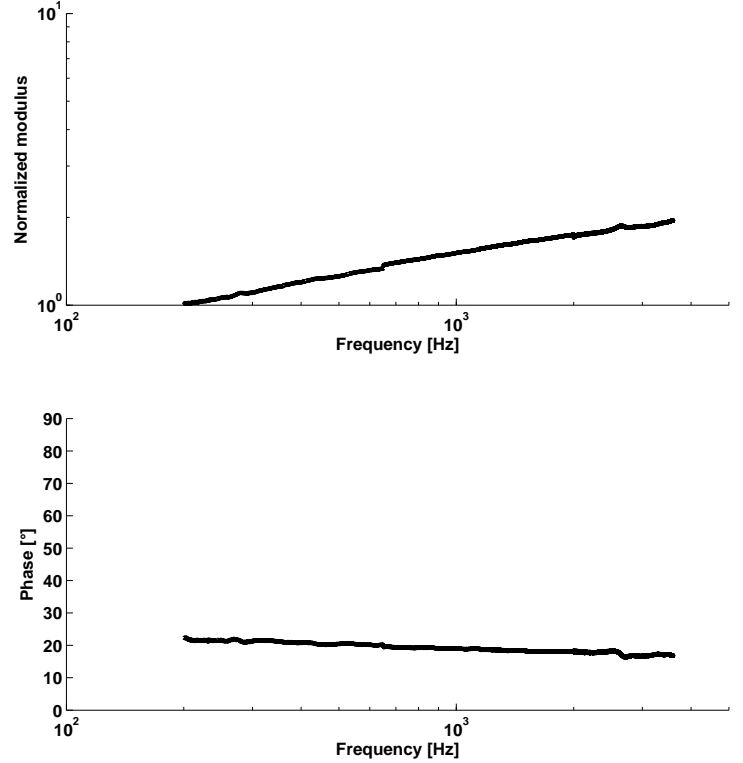
**INTRODUCTION**

Many mechanical systems are damped with viscoelastic materials. This helps to avoid instabilities and to limit the levels of vibration. Although the viscoelastic behavior of materials is of great importance in order to obtain accurate results, the assumption of purely elastic materials is very commonplace for frequency analysis with Finite Element (FE) models. In order to carry out realistic Complex Eigenvalue Analysis (CEA) in dynamics, one needs to model viscoelasticity. Linear viscoelastic-

ity has been described by many authors, for citing just a few of them: Ferry [1], Vinh [2], Caputo [3], Lakes [4], Chevalier [5]. Linear viscoelasticity assumes the existence of a relation between stress,  $\sigma$ , of a material and its strain,  $\varepsilon$ , history. Let us call  $h(t)$ , the relaxation function which is also an element of the complex stiffness tensor. Linear viscoelasticity is defined by the Equation (1). The Fourier transform is denoted with a hat and  $H = \hat{h}(\omega)$ .

$$\begin{cases} \sigma(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \\ \hat{\sigma}(t) = H\hat{\varepsilon}(\omega) \end{cases} \quad (1)$$

Viscoelastic behaviour of materials is difficult to measure over a large frequential bandwidth. For that, several methods of characterization exist. Oberst and Frankenfeld [6] proposed to study the first mode of a sandwich beam made up of metal skins and of a viscoelastic heart. Their method makes it possible to know the damping induced by the viscoelastic heart only at the frequency of the first modes. These modes usually appear at frequencies lower than 1000Hz. Several authors use this kind of technique for the identification of viscoelastic parameters, Barbosa and Farage [7] and Castello et al. [8]. It is also possible to deduce the mechanical properties from a viscoelastic material starting from the measurement of the various Eigen frequencies of a sample having a simple form, a beam for example, see Chevalier [9]. These methods are equivalent with the deduction of the mechanical properties starting from Frequency Response Function (FRF). This type of methods allows only the characterization of the frequencies of the Eigen modes and not on a large frequential bandwidth. Moreover these methods are valid only under the linear material assumption in amplitude of excitation. Chen [10] proposed to directly measure the functions of relieving and creep to deduce the coefficients from them from a series of Prony. However, it is difficult to impose a level of perfect displacement, thus this method, which gives access to the behaviour on a large frequential bandwidth, is accurate only at low frequencies. For the characterization of viscoelastic materials, the Dynamic Mechanical Analysis (DMA) is the most suited technique. It allows one to measure the stress and the strain of materials and thus to calculate the dynamic rigidity of the samples according to the frequency. DMA testers work into quasi-static, i.e. at all frequencies lower than the first Eigen mode of the test bench. Currently, the best DMA testers allow characterizations, with preload and without using frequency-temperature equivalences, until approximately 1000Hz. Thus there is a need of a new DMA tester in order to measure the viscoelastic behaviour at higher frequencies in quasi-static excitation.



**FIGURE 1.** Complex shear stiffness of a multilayer viscoelastic material at ambient temperature in the [200-3500Hz] frequency range. The top graph represents the normalized modulus  $H(f)/H(f = 200\text{Hz})$  (dimensionless) and the bottom graph represents the phase  $\psi$  (in degrees).

Tests on viscoelastic materials led by many authors exhibit strong stiffness frequency dependence on both modulus and phase, see Vinh [2], Soula [11]. For example, Figure 1 shows the stiffness of a multi layer material with layers of glue, rubber and steel. The non-zero value of the stiffness phase of viscoelastic materials is well known, because it generates damping. But the stiffness modulus is also frequency dependent, hence, simple models, with constant modulus, such as constant complex modulus or modal damping are not accurate. Many rheological models have been proposed for  $H$ , as the constant complex modulus, Maxwell, Voigt, Zener, etc (see Renaud et al. [12]). In the present paper Generalized Maxwell model (GMM) is used. The parameters of this model will be identified from the curve of  $H$  against the angular frequency, see Renaud et al. [12].

Given an experimental transfer function characterizing a complex stiffness  $H$ , the identification of the parameters of the GMM can be carried out with some graphical methods. Two of them were described by Vinh [2] and Oustaloup [13]. These methods are led on a Pole-Zero Formulations which are equivalent to the GMM. The identification method presented here has

been detailed in the article of Renaud et al. [12]. This method uses the characteristics of the asymptotes of Pole-Zero Formulations and allows one to identify parameters from both the modulus and the phase curves.

## PIEZOELECTRIC VISCOANALYZER (DMA) CONCEPT

### Shear measurement principle

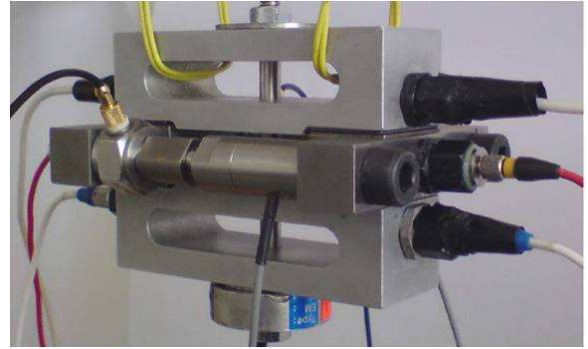
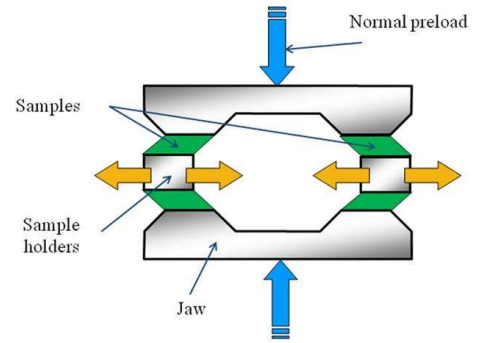
The design of the DMA tester is shown on the Figure 2. The samples are gripped between the jaws and the holders of samples. Due to symmetry, this tester needs four samples for characterization. In contrary to the Oberst beam test and thanks to the symmetry principle, this DMA tester allows pure dynamical shear excitation without inflection. A normal preload is applied with a unique M6 bolt. The preload is limited to 5000N in order not to plasticize the jaws. Thanks to the hollow shape of the jaws, the preload is well distributed on the sample surface. The sample size, 20\*30mm, is thus selected to ensure a pressure of 4MPa with a preload of 5000N.

The shearing of the samples is obtained by moving the sample holders in phase opposition. For that, two chains of actuation are placed between the holders. These chains consist in a piezoelectric actuator, a connector and a force sensor. Thanks to the symmetry, there is no need to clamp the chains of actuation on a frame.

The DMA tester works in quasi-static excitation, which means at any frequency below the first Eigen mode of the tester. The first Eigen mode involve the displacement of the sample holders, the strain of samples and the inflection of chains of actuation. The frequency of the first Eigen mode depends on the stiffness of samples. In the case of samples whose behaviour is plotted in Figure 1, the limiting frequency of the first Eigen mode appears around 4100Hz. Thus the DMA tester can be used until 3500Hz without any modal disturbance. It is worth noticing that the classical Oberst's beam method is unable to give a result at such high frequencies.

### Quasi static excitation

The piezoelectric actuators make it possible to reach high frequencies higher than 10 kHz. The frequential limit is set by the frequency of the first Eigen mode of the DMA tester. So this frequency must appear as high as possible. Consequently, the DMA tester is suspended by rubber bands to avoid Eigen modes coming from the frame. Actually, the tested viscoelastic materials have so low shear stiffness that the first Eigen mode is due to the mass of the holders and the actuation chains suspended by the tested samples. This Eigen mode generally appears around 4100Hz and limits the characterization to a frequency of 3500Hz.



**FIGURE 2.** Principle and picture of the shear DMA tester.

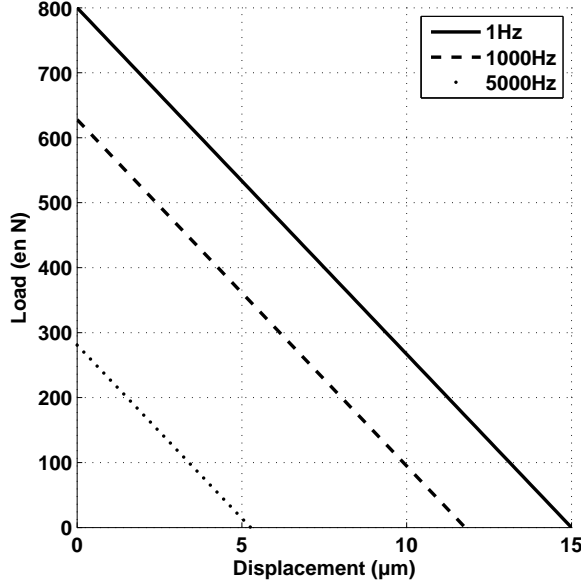
The jaws are made in aluminium. Their design has been optimized so that the unique preloading bolt generates a uniform preload of the samples on their whole surface. This design also ensures the decoupling between the normal load and the shear load on the samples. The first Eigen mode of this jaw appears around 7500Hz.

The Figure 3 shows the capabilities of each piezoelectric actuator according to the Equation (2), with  $\delta X$  the displacement,  $F$  the force,  $K$  the stiffness of the actuator,  $\delta V$  the tension and  $N$  the force factor. The continuous line shows the force-displacement behavior of actuators, for the maximum electrical alimentation:  $\delta V = 100$  Volts.

$$\delta X = (N \delta V - F) / K \quad (2)$$

When their ends are blocked, the displacement is nil and the maximum pushing force they can generate is 800N. If their ends are free, the force is nil and the maximum displacement is  $\delta X = 15$  m. Unfortunately, the actuators are similar to electric capacities, thus the more the frequency of excitation is raised and the more the actuators need current. Since, the power of the actuators driver is limited to  $Q = 30$  Watts, the current is also limited, see Equation (4) and the real behaviors of actuators at  $f = 1000$  Hz and  $f = 5000$  Hz are shown in Figure 3.



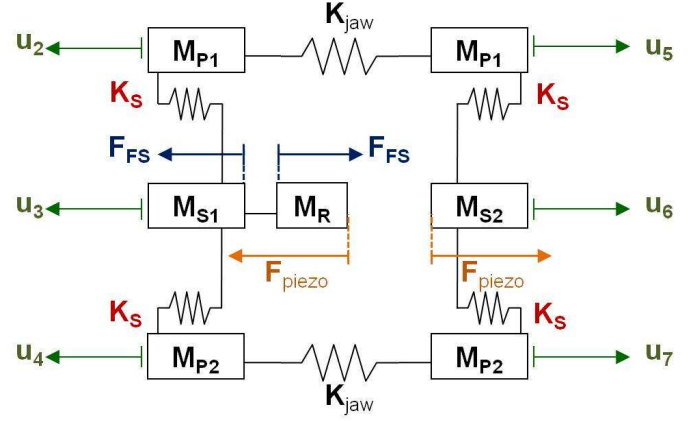


**FIGURE 3.** Real working characteristics of the piezoelectric actuators combined with a 30W driver.

$$Q = 2\pi f C_e V_p^2 \quad (3)$$

### Test post processing

Basically, the complex shear stiffness of the samples is the ratio of the force spectra to the displacement spectra. However the assumption of quasi-static excitation is true until 3500Hz, some inertia effect must be taken into account in the post processing. Thus a simplified model of the DMA tester has been set, see Figure 4. The jaws are modeled by two identical masses,  $M_P$ , connected between them by a spring,  $K_{jaw}$ . The masses  $M_P$  represent the moving part of the jaw which undergoes the accelerations read by the accelerometers. Since, the DMA tester is quasi-symmetrical between the sides left and right, the central part of the jaws which constitutes the symmetry plane, does not move. Consequently, the masses of the screw M6 and the sensor of force do not move and one has  $M_{P1} = M_{P2} = M_{jaw}/3 + M_{accelerometer}$ . The spring  $K_{jaw}$  is the same one for the two jaws. It was evaluated starting from a calculation by finite elements. The two chains of actuation are identical and are made up of a sensor of force, a connector and a piezoelectric actuator. These two chains of actuation work in phase and push with the same force, thus they are regarded as one equivalent chain of actuation generating an equivalent force which is the sum of the forces of both  $F_{piezo} = F_0 + F_1$ . However, because of the efforts of inertia, the force measured on the level of the sensors, is neither equal to the force generated by the actuators nor equal to the force undergone by a sample. In order



**FIGURE 4.** Model of the DMA tester for post processing.

to take into account these efforts of inertia, the equivalent chain of actuation is modeled by three different masses  $M_{S1}$ , the mass of the support of left,  $M_R$  the mass of the connector and  $M_{S2}$  the mass of the support of right-hand side.  $F_{FS}$  is the force measured by the force sensors.

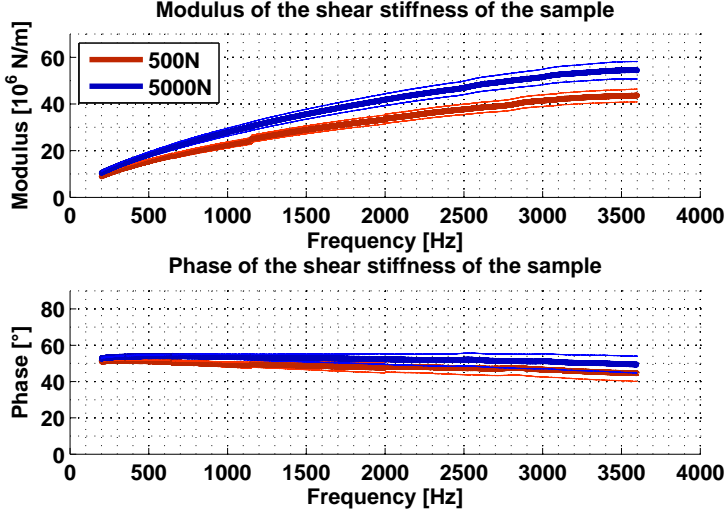
It is worth noticing that because of the efforts of inertia of the connector, the force generated by the piezoelectric actuators is  $F_{piezo} = M_R \ddot{u}_3 + F_{FS}$ . The stiffness of samples is modeled by a frequency dependent complex number,  $K_S$ . Thus, the damping of the samples is given by the argument of this complex number,  $K_S$ . The equations of the dynamics of the system are given by the Equations (4).

$$\begin{aligned} (a) \quad & M_{P1} \ddot{u}_2 = -K_{jaw}(u_2 + u_5) + K_S(u_3 - u_2) \\ (b) \quad & M_{S1} \ddot{u}_3 = -K_S(2u_3 - u_2 - u_4) + F_{FS} \\ (c) \quad & M_{P2} \ddot{u}_4 = -K_{jaw}(u_4 + u_7) + K_S(u_3 - u_4) \\ (d) \quad & M_{P1} \ddot{u}_5 = -K_{jaw}(u_2 + u_5) + K_S(u_6 - u_5) \\ (e) \quad & M_{S2} \ddot{u}_6 = -K_S(2u_6 - u_5 - u_7) + F_{FS} + M_R \ddot{u}_3 \\ (f) \quad & M_{P2} \ddot{u}_7 = -K_{jaw}(u_4 + u_7) + K_S(u_6 - u_7) \end{aligned} \quad (4)$$

By calculating the sum of the relations (b)+(e), one obtains the complex stiffness,  $K_S$ , of the samples, see Equation (5)

$$K_S = \frac{(M_{S1} - M_R) \ddot{u}_3 + M_{S2} \ddot{u}_6 - 2F_{FS}}{u_2 + u_4 + u_5 + u_7 - 2u_3 - 2u_6} \quad (5)$$

Equation (5) is not used during post processing because displacements are calculated by double integration of accelerometer measurements. This double integration is carried out by the formula  $\ddot{u} = -\omega^2 u$ . Thus, the Equation (5) is replaced by the Equation (6).



**FIGURE 5.** Modulus and phase of the shear stiffness of a multilayer viscoelastic material with layers of glue, rubber and steel. The blue curve has been obtained with a normal load of 5000N and the red one with a normal load of 500N.

$$K_S = \omega^2 \frac{(M_{S1} - M_R)\ddot{u}_3 + M_{S2}\ddot{u}_6 - 2(F_0 + F_1)}{2\ddot{u}_3 + 2\ddot{u}_6 - \ddot{u}_2 - \ddot{u}_4 - \ddot{u}_5 - \ddot{u}_7} \quad (6)$$

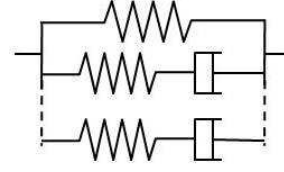
The authors want to point out that because the strain of samples is measured close to samples, the measurement of  $K_S$  does not depend on the behaviour of the jaws. This can be seen in Equation (6). Moreover, the jaws are made in aluminium, thus their damping is low.

### Results on industrial specimens

The Figure 5 shows the complex shear stiffness of a multilayer viscoelastic material for two normal preloads : 500 and 5000N. This material is made of layers of glue, rubber and steel. One can see the stiffening effect of viscoelasticity. This stiffening effect cannot be taken into account by the common modal damping model. On the contrary, the Generalized Maxwell model is able to describe such behaviour.

### IDENTIFICATION OF THE COMPLEX SHEAR MODULUS

The Generalized Maxwell model is a rheological model described by the Figure 6 and the Equation (7). It is composed of  $N$  Maxwell cells, with  $K_0$ , the static stiffness,  $K_i$  the stiffness in the  $i^{\text{th}}$  Maxwell cell and  $C_i$  the damping in the  $i^{\text{th}}$  Maxwell cell.



**FIGURE 6.** Rheological model of Generalized Maxwell.

$$Z(\omega) = K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i} \quad (7)$$

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})} \quad (8)$$

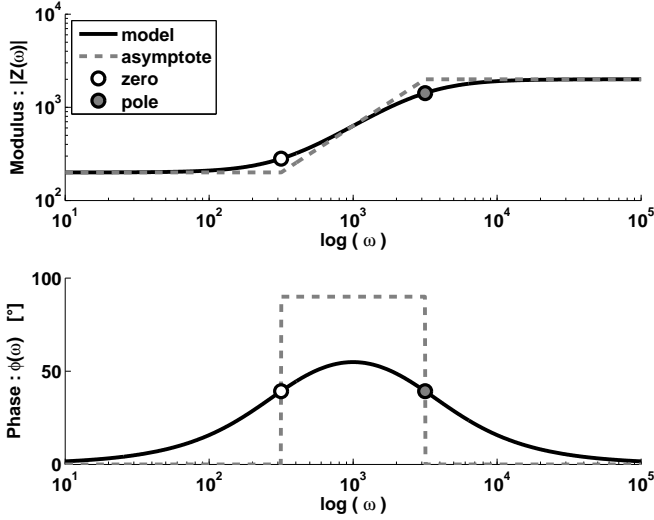
$$\begin{cases} K_i = K_0 \prod_{h=1}^N \left( \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{\omega_{p,i} - \omega_{z,h}}{\omega_{p,i} + \omega_{p,h}(\delta_{ih} - 1)} \right) \\ C_i = \frac{K_i}{\omega_{p,i}} \end{cases} \quad (9)$$

The identification of Generalized Maxwell parameters using a pole zero formulation has been fully detailed in the article of Renaud [12]. Let us summarize the main steps. First, it is worth noticing that in the logarithmic scale, the behaviour of a pole zero formulation is the sum of the behaviour of each pole zero couple. The modulus and the phase generated by one pole zero couple in logarithmic scale is given by the Equation (10).

$$\begin{cases} \log(|Z(\omega)|_i) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right)^2 \right) \\ \phi_i(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right) \end{cases} \quad (10)$$

Since this behaviour is non-linear against frequency, we will approach them with asymptotes, see Figure 7.

Let us define the stiffening  $S(|Z|, \chi_a, \chi_b)$  and the area under the phase curve  $A(\phi, \chi_a, \chi_b)$  by the Equation (11). The identification of poles and zeros will be led by equating the stiffening and the area of experimentally measured curves and the stiffening and the area of the model.



**FIGURE 7.** Behaviors of the modulus and the phase of one pole-zero couple and its asymptotes.

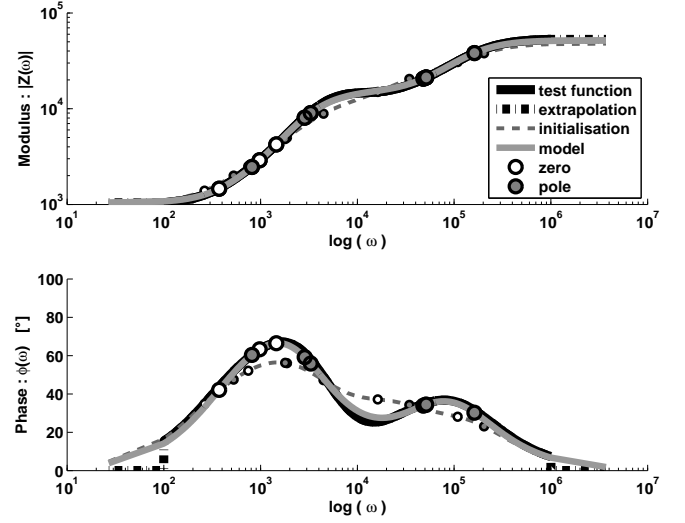
$$\forall \chi_a = \log(\omega_a) \in \mathbb{R} \text{ and } \chi_b = \log(\omega_b) \in \mathbb{R},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(|Z|, \chi_a, \chi_b) = \int_{\chi_a}^{\chi_b} \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|Z(\chi)|) d\chi \\ \quad = \log(|Z(\chi_b)|) - \log(|Z(\chi_a)|) \\ A(\phi, \chi_a, \chi_b) = \int_{\chi_a}^{\chi_b} \phi(\chi) d\chi \end{array} \right. \quad (11)$$

The stiffening and the area of the asymptotes are given by the Equation (12) and are easy to calculate. They are proportional to the gap between the pole and the zero:  $\log(\omega_{p,i}) - \log(\omega_{z,i})$ . Thus, by the knowledge of the stiffening and the area of experimentally measured curves, it is easy to obtain the gap between the pole and the zero.

$$\left\{ \begin{array}{l} S(|Z^{asy}(\chi)|_i, \chi_a, \chi_b) = \log(\omega_{p,i}) - \log(\omega_{z,i}) \\ A(\phi_i^{asy}(\chi), \chi_a, \chi_b) = \frac{\pi}{2} (\log(\omega_{p,i}) - \log(\omega_{z,i})) \end{array} \right. \quad (12)$$

The identification begins by an initialisation step. It consists in an apportionment of the frequency domain so that each sub domain has the same stiffening and phase area. Then the Equation (12) allows the calculation of one pole-zero couple in each sub domain. The initialisation step gives a first set of



**FIGURE 8.** Given a test stiffness function, the identification is led in two steps: initialization and optimization.

parameters which is optimized in a second step.

The difference between experimental curves and the model obtained after initialisation can be seen as local lacks and local excesses of stiffening and area. These local lacks and excesses are translated into difference between pole and zero,  $\log(\omega_{p,i}) - \log(\omega_{z,i})$  by the Equation (12). It allows the adjustment of initial parameters by iteration.

For example, a local excess of stiffening appearing on the right of a pole-zero couple means that the pole has to tend towards the zero. On the contrary if this excess of stiffening appears on the left of a pole-zero couple, the zero has to tend towards the pole. Moreover, all pole-zero couples of the model are able to correct a local excess of stiffening, so all pole-zero couples of the model have to be adjusted. Actually, the behavior of the model at a frequency far from a pole-zero couple is quasi independent of this couple. Indeed, the contribution of a pole-zero couple, at a frequency far from it, is very low, see Figure 7. So the adjustment of a pole zero couple, because of a local difference, is weighted according to its local contribution to the whole model.

This identification technique is efficient, see Figure 8. Unlike some others techniques based on non-linear optimization, it allows constraining the values of the zeros to be lower than the values of the poles to ensure the causality of the model, see Renaud [12]).

In general cases, several viscoelastic materials can appear in a same FE model. For some reasons concerning calculation

time, that are not developed here, it is better to have the same relaxation times for all materials. A relaxation time is equal to the inverse of a pole. So, in the case of 3 pole-zero models with 5 pole-zero couple, it means it is better to have 5 poles common to the 3 models. The inclusion of this constraint requires to do 2 more steps. The third one consists in calculating the mean value of the poles and recalculating the zeros. Then, the fourth step is an optimisation step analogous to the second one.

## CONCLUSIONS

A new Dynamical Mechanical Analysis (DMA) tester has been developed for the characterization of the shear stiffness of viscoelastic materials which are known to be frequency dependent. It allows direct characterization under preload, for frequencies starting from 200Hz to 3500Hz without using the frequency-temperature equivalences.

The Generalized Maxwell model has been chosen to describe the experimentally measured behavior of viscoelastic material. This rheological model is equivalent to a pole-zero formulation. An identification method has been developed. It allows to compute the poles and the zeros from the behavior of materials measured with the DMA tester. This method gives good results and allows ensuring the causality of the model by constraining the zeros to be lower than the poles. In the case of several materials to identify, this identification method allows computing same poles for all material. Since a pole is the inverse of a relaxation time, each material is thus modeled with the same relaxation times. This characteristic is of great importance for computation time reduction in FE models.

## REFERENCES

- [1] Ferry, J. D., 1961. *Viscoelastic Properties Of Polymers*. John Wiley & Sons.
- [2] Vinh, T., 1967. "Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique". *Mémorial de l'artillerie française, 3ème fascicule*.
- [3] Caputo, M., and Mainardi, F., 1971. "Linear models of dissipation in anelastic solids". In *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)*, I. P. Society, ed., Vol. 1. Italian Physical Society, avril, pp. 161–198.
- [4] Lakes, R. S., 1999. *Viscoelastic Solids*. CRC Press.
- [5] Chevalier, Y., and Vinh, J. T., 2010. *Mechanics of Viscoelastic Materials and Wave Dispersion*, Vol. 1. ISTE and John Wiley & Sons.
- [6] Oberst, H., and Frankenfeld, K., 1952. "Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer". *Acustica* 2, pp. 181–194.
- [7] Barbosa, F., and Farage, M., 2008. "A finite element model for sandwich viscoelastic beams: Experimental and numerical assessment". *Journal of Sound and Vibration*, 317(1-2), pp. 91 – 111.
- [8] Castello, D., Rochinha, F., Roitman, N., and Magluta, C., 2008. "Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8), pp. 1840 – 1857.
- [9] Chevalier, Y., 2002. Essais dynamiques sur composites. caractérisation aux basses fréquences. Tech. rep., Techniques de l'ingénieur.
- [10] Chen, T., 2000. Determining a prony series for a viscoelastic material from time varying strain data. Tech. rep., NASA, may.
- [11] Soula, M., Vinh, T., Chevalier, Y., Beda, T., and Esteoule, C., 1997. "Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies". *Journal of Sound and Vibration*, 205(2), pp. 167 – 184.
- [12] Renaud, F., Dion, J.-L., Chevallier, G., Tawfiq, I., and Lemaire, R., 2011. "A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized maxwell model". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3), pp. 991 – 1010.
- [13] Oustaloup, A., 1991. *La commande CRONE : commande robuste d'ordre non entier*. Hermès.



**DETC2011-48897**

## **COMPLEX EIGENVALUE ANALYSIS FOR STRUCTURES WITH VISCOELASTIC BEHAVIOR.**

**G. Chevallier**  
LISMMA EA 2336  
Supméca  
3 rue Fernand HAINAUT  
92400 SAINT-OUEN  
FRANCE

**S. Thouviot**  
Supméca  
93400 SAINT-OUEN

**F. Renaud**  
Supméca  
93400 SAINT-OUEN

**J.-L. Dion**  
Supméca  
93400 SAINT-OUEN

### **ABSTRACT**

This document deals with a method for eigenvalue extraction for the analysis of structures with viscoelastic materials. A generalized Maxwell model is used to model linear viscoelasticity. Such kind of model necessitates a state-space formulation to perform eigenvalue analysis with standard solvers. This formulation is very close to ADF formulation. The use of several materials on the same structure and during the same analysis may lead to a large number of internal states. This article purpose is to identify simultaneously all the viscoelastic materials and to constrain them to have the same time-constants. As it is usually possible, the size of the state-space problem is therefore widely reduced. Moreover, an accurate method for reducing mass and stiffness operators is proposed; The enhancement of the modal basis allows to obtain good results with large reduction. As the length of the paper is limited, only theoretical development are presented in the present paper while numerical results will be presented in the conference.

**Keywords:** Viscoelasticity, complex modal analysis, state-space formulation, finite element

### **INTRODUCTION**

Many mechanical systems are damped with viscoelastic materials. This helps to obtain highly damped structures and thus to limit the vibration levels. Although the viscoelastic behavior of materials is of great importance in order to obtain accurate eigenvalues and eigenmodes, the assumption of purely elastic materials is very commonplace for frequency analysis with Finite Element (FE) models. In order to carry out realistic

Complex Eigenvalues Analysis (CEA) in dynamics, one needs to measure, identify and to model the viscoelastic behavior of the structure;

### **Theoretical aspects**

Viscoelastic behavior may be described using internal states in the time domain, see [1] or [2], or rational fraction with poles and zeros in the frequency domain. This way had led to the famous GHM [1] and ADF [2] models useful both in time and frequency domain. These aspects are well summarized in the paper of Vasques & al. [3]. The rheological model associated with such kind of models is the well known Generalized Maxwell Model, see [4] , [5] or [6] for examples of the use of this model in its rheological form. The use of fractional derivative models with rational exponents leads also to model visco elasticity with internal states, see sorrentino & al. [7].

A particular focus on CEA is done in the present paper because the analysis of the stability of non-linear systems is often performed using this tool : Aeroelasticity or friction induced vibrations are studied with CEA, see [8] for example. Adding viscoelastic materials in these simulations leads to augment the order of the eigenvalue problem to solve. Several methods had been developed to solve this kind of problem from non linear eigenvalue extraction, see Daya & al. [9] for example, to the use of state space formulation. But these two approaches are quite time-consuming in terms of CPU use.

**This paper aims to give an original state space formulation which allows to reduce the computation cost of CEA.** The main originalities of this paper are the use of common time-relaxation constants for all the viscoelastic materials that are

used in the simulations and the use of an enhanced modal basis for the projections of mass and stiffness FE operators. To achieve this goal, identification and modeling computations have to be linked in order to obtain common time-constants. The identification process used in this paper is well described in the paper of Renaud & al. [6].

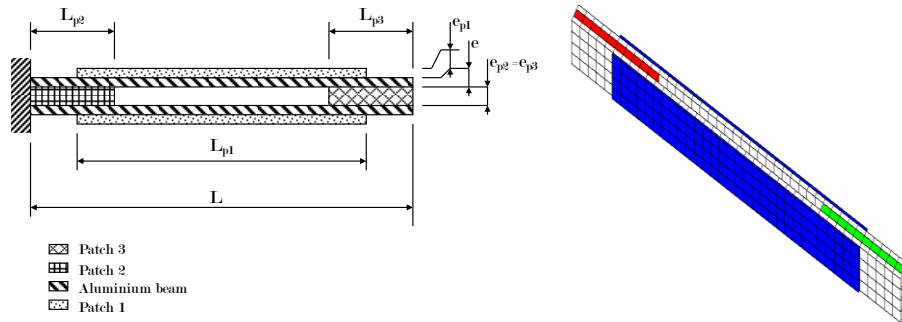
The first part of this paper deals with the use of Generalized Maxwell Models in Finite Element Formulation. As the authors are mainly interested by Complex Eigenvalue Analysis, they propose a state-space formulation of the equations. Solving the problem obtained leads to the determination of complex modes and eigenvalues. This kind of formulation is very close to the formulation ADF proposed by Lesieutre. Nevertheless, the use of several viscoelastic materials can lead to determination of a large number of internal states and thus to very large state space model. Thus, according to the idea proposed by Trindade & al. [10], the authors propose to use a modal basis projection to reduce the size of the mass and stiffness operators.

In the second part of the paper, the authors propose to identify simultaneously the parameters of the Generalized Maxwell

Model of all the materials under the constraint that they must have the same time constants. This assumption allows limiting the number of internal state in the state space formulation and thus reducing the computation time. Many numerical results are given on the following example to illustrate the paper.

### Numerical Example

In order to illustrate the analytical developments and to demonstrate the computing efficiency, the authors present a simple example of multi-layered beam with three different viscoelastic materials, see figure 1. The beam is clamped on the left and free on the right. It has been designed to have its first natural frequency at 70 Hz. Moreover, the authors are interested in the first 15 modes only. These modes have been computed using the Finite Element Method in the industrial code ABAQUS. The structure has been meshed with C3D8 Linear Volumetric Elements. Detailed results will be presented in the conference.



**Figure 1.** Left : Schema of the multilayered beam. Dimensions are :  $L=0.2\text{m}$  –  $L_{p1}=0.15\text{m}$  –  $L_{p2}=0.05\text{m}$  –  $L_{p3}=0.05\text{m}$  –  $e=0.002\text{m}$  –  $e_{p1}=0.001\text{m}$  –  $e_{p2}=e_{p3}=0.003\text{m}$  – depth for all the layers :  $d=0.02\text{m}$ . Patch are made with polymer materials. Beam is constituted with aluminium thin layers.  
Right : View of the meshed beam : C3D8 Elements – Red : Patch 2 – Green : Patch 3 – White : Aluminium layers.

An identification procedure has been used to determine the parameters of the viscoelastic models. The three materials are supposed to be frequency dependent and to behave linearly against the loads ; So that they are assumed to be well described with a complex Young Modulus :  $E^*=E(1+j\eta)$ . In this definition  $E$  is often called “Storage Modulus” and  $\eta$  is called “Loss Factor”. In addition, the Phase is defined as follow :  $\tan\phi=\eta$ . Material 1 has a quite constant phase over the studied frequency range : i.e. [70... 4000] Hz. Material 2 has a linearly increasing phase over the studied frequency range from 5 deg. to 10 deg. Material 3 has a decreasing phase from 20 deg. to 15 deg.

The first natural modes of the structure have been computed considering the Long Term Moduli  $E_\infty$  of the materials. This allows to compute the strain energies of each viscoelastic parts and then to approximate the modal damping of the structure. This technic is widely used in mechanical engineering to

perform a rapid evaluation of the damping of such kind of structure. In this paper, we will use it as a reference to be compared to more accurate technics.

These modes are computed using ABAQUS to build the mass and stiffness operators and to compute the first eigenmodes using Lanczos algorithm. These modes are mainly bending modes and few of them are torsionnal modes.

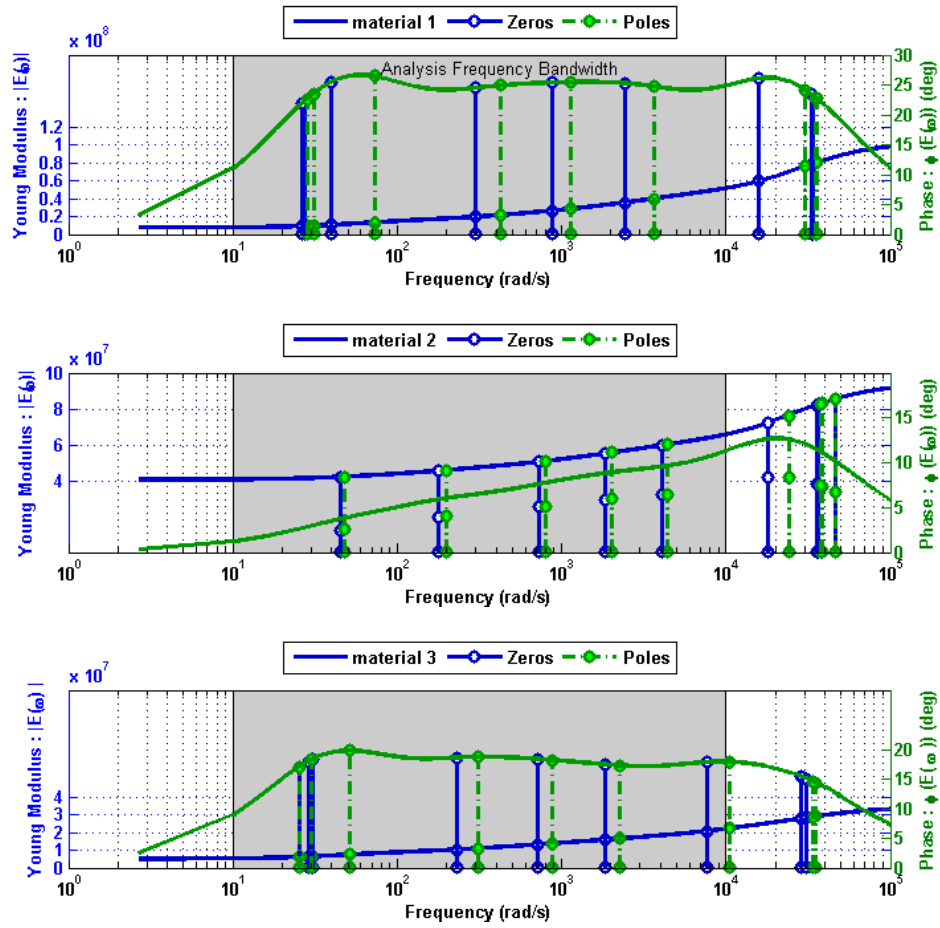


Figure 2. Frequency dependence of the three viscoelastic materials ; Frequency independent data are :

Material 1 :  $E_{\infty}=10\text{MPa}$  -  $\nu=0.49$  -  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$   
 Material 2 :  $E_{\infty}=20\text{MPa}$  -  $\nu=0.49$  -  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$   
 Material 3 :  $E_{\infty}=5\text{MPa}$  -  $\nu=0.49$  -  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$

### Aims of the present work

The present work aims to compute complex eigenvalues in order to obtain with a great precision and quick computation: the natural frequencies and the modal damping. Due to the frequency dependence of the materials, the generalized eigenvalue problem is quite complex to compute. The authors' purpose is to reduce the size of the state space problem to solve:

The first idea is to use common poles for all the material models in order to reduce the number of state variables. To achieve this goal, one need to integrate the parametric identification of the material models to the FE computation.

The second idea is to use a Ritz basis to project the nodal degrees of freedom. This leads to a reduction of the mass and stiffness operators. The choice of the basis has to be discussed in order to limit the errors induced by the projection.

The general theoretical context is first presented. The widely known constitutive equations of linear mechanics with viscoelasticity are recalled. Then the authors present a general state space formulation for such kind of problem. The size of the state space operators makes the problem very hard to compute. Thus, techniques for model reduction are presented. Theoretical aspects and numerical results are then presented.

### THEORETICAL ASPECTS

Linear viscoelasticity has been widely studied during the last decades, constitutive equations and finite element formulation are firstly recalled in order to explain the notations. Then an original state space formulation which avoid numerical scale problems is presented. Finally a new assumption is formulated; it allows to reduce the state-space problem size and consequently the computation time. All the analytical developments are illustrated with numerical results.



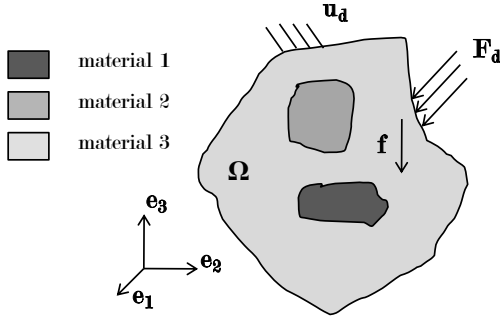


Figure 3. Generalized view of a heterogeneous solid with elastic and viscoelastic parts submitted to load  $F_d$  and  $f$  and kinematic boundary conditions  $u_d$

### Constitutive equations

The first Newton equation applied to an elementary volume links the acceleration to the internal stresses

$$T_{ij,j} + f_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (1)$$

where  $T_{ij}$  represents the component  $ij$  the Cauchy stress tensor,  $f_i$  is the component  $i$  of the volumetric loads and  $u_i$  is the component  $i$  of the displacements in the  $(e_1, e_2, e_3)$  coordinates, system, see figure 3. The compatibility equations link the displacements  $u$  and the strains  $S$ .  $\rho$  is the density of the materials.

$$S_{ij,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

Linear viscoelasticity assumes that stress is a function of strain history, see for example: (E. Balmès, 2009) (R. S. Lakes, 1999) (Y. Chevalier, 2010). This translates into the existence of a relaxation function  $H$  given by:

$$T_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t H_{ijkl}(t-\tau) S_{kl}(\tau) d\tau \quad (3)$$

The relaxation function,  $H_{ijkl}$  might be different on each viscoelastic subdomain. The last equations are the boundary conditions on the displacement field  $u$  and the stress field  $T$ .

$$\begin{aligned} u &= u_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u \\ \sigma n &= F_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_F \end{aligned} \quad (4)$$

Using Laplace transform, the previous equations become:

$$\begin{cases} \hat{T}_{ij,j} + \hat{f}_i = \rho \frac{d^2 \hat{u}_i}{dt^2} \\ \hat{S}_{ij,j} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) \\ \hat{T}_{ij} = \hat{H}_{ijkl}(s) \hat{S}_{kl} \\ \hat{u} = \hat{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u \\ \hat{\sigma} n = \hat{F}_d \quad \text{sur} \quad \Omega_F \end{cases} \quad (5)$$

In the frequency domain and where  $s$  is the Laplace variable.

The viscoelastic behavior of the materials might include a frequency dependence in order to correlate experimental observation. This dependence includes stiffening and frequency dependent damping. Several **rheological models** are able to take these dependences into account. The famous Kelvin-Voigt, Maxwell, and Zener models are quite efficient on a small frequency range. For the analysis on large frequency bandwidth, the Generalized Maxwell (GM) model and the fractional-derivative-based models are very accurate and realistic. Some tools had been previously developed in our team to identify viscoelastic behaviors with the GMM, see (F. Renaud, 2010) and (J.L. Dion, 1995). Thus this model is used in the present paper. Nevertheless this assumption is not essential and the following development may be used with all the viscoelastic models that are defined with rational fraction with time constants or frequency poles. In one dimension, the GM model is given by the following equation

$$\hat{T}_{11} = \left( E_\infty + \sum_i \frac{E_i \tau_i s}{\tau_i s + 1} \right) \hat{S}_{11} \quad (6)$$

Where  $E_\infty$  is the long term Young Modulus (also called static modulus by some authors),  $E_i$  is a dynamic modulus and  $\tau_i$  is a time constant. Such kind of 1D-formulation is used to identify the behaviours of viscoelastic material with frequency dependent Storage modulus and loss factor, see figure 2 and Renaud, 2010. It is convenient to transform the previous equation in the following :

$$\hat{T}_{11} = \left( 1 + \sum_i \frac{\alpha_i \tau_i s}{\tau_i s + 1} \right) E_\infty \hat{S}_{11} \quad (7)$$

where  $\alpha_i$  is the ratio  $E_i/E_\infty$  which translate into the stiffening of the material according to the frequency of the excitation. The extension of the GM model to three dimensional problems leads to:

$$\hat{T} = \underbrace{\left( 1 + \sum_i \frac{\alpha_i \tau_i s}{\tau_i s + 1} \right)}_{\hat{h}(s)} \hat{H} \hat{S} \quad (8)$$

Where  $H$  is the material tensor and is frequency independent. The frequency dependence is included in the function  $h(s)$ . The main assumption of this equation is the isotropy of the

frequency dependence. In fact, even if  $\mathbf{H}$  translates into anisotropy, the frequency dependence is the same for all the directions.

### Finite element approximation

The previous problem (5) can be written in its variational form. This leads to the following equations when the test function  $\hat{\mathbf{u}}$  belongs to  $\{\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1 \text{ and } \mathbf{u}=\mathbf{u}_d \text{ for } \mathbf{x} \in \partial\Omega\}$

$$\int_{\Omega} \rho s^2 \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^* dV + \int_{\Omega} \hat{S}_{ij} \hat{H}_{ijkl}(s, \mathbf{x}) \hat{S}_{kl}(\hat{\mathbf{u}}^*) dV = 0 \quad (9)$$

As the materials behaviors are frequency and space independent and linear to the displacement, the previous equations might be written separating the strain energies for each subdomain.

$$\int_{\Omega} \rho s^2 \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{u}}^* dV + \sum_i \hat{h}_i(s) \int_{\Omega_i} \hat{S}^T H_i \hat{S}^* dV = 0 \quad (10)$$

Where  $h_i(s)$  is equal to 1 when materials are purely elastic and defined by (8) when subdomains are viscoelastic. As for a linear elastic problem, the domain can be discretized into Finite Elements and the displacement field can be interpolated by a polynomial function on each element, see for example [11]. This leads to the following algebraic equation:

$$s^2 \hat{\mathbf{U}}^T M \hat{\mathbf{U}}^* + \sum_i (\hat{h}_i(s) \hat{\mathbf{U}}^T K_i \hat{\mathbf{U}}^*) = 0 \quad (11)$$

The previous expression is transformed into the following in which the elastic terms are all assembled whereas the viscoelastic ones are kept separated. Moreover, the generalized Maxwell model is introduced.

$$s^2 \hat{\mathbf{U}}^T M \hat{\mathbf{U}}^* + \hat{\mathbf{U}}^T K_e \hat{\mathbf{U}}^* + \sum_i \left( \sum_j \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s}{\tau_{ij} s + 1} \hat{\mathbf{U}}^T K_i \hat{\mathbf{U}}^* \right) = 0 \quad (12)$$

Where  $K = \sum K_i$ ;  $K_i$  are the stiffness matrices of each subdomain. These matrices are build using a linear finite element code introducing the long term material coefficient. If  $\hat{\mathbf{U}}^*$  belongs to  $\{\mathbf{U}=\mathbf{U}_d \text{ on } \partial\Omega\}$ , the equation (12) leads to:

$$s^2 M \hat{\mathbf{U}} + K_e \hat{\mathbf{U}} + \sum_i \left( \sum_j \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s}{\tau_{ij} s + 1} K_i \hat{\mathbf{U}} \right) = 0 \quad (13)$$

Unfortunately, this formulation leads to very sparse matrices for which some diagonal terms are nil. For the example, figure 1, the non-zeros terms of the matrices for the material 1, 2 and 3 are plotted on the figure 4.

Due to this result, one may use separated displacement fields for each subdomain:  $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{U}}_0 \ \hat{\mathbf{U}}_1 \ \hat{\mathbf{U}}_2 \ \hat{\mathbf{U}}_3]^T$ . Where the vectors  $\hat{\mathbf{U}}_i$  are the displacement of the nodes associated the “subdomain i” and  $\hat{\mathbf{U}}_0$  to the others nodes. The equation (12) becomes:

$$s^2 \hat{\mathbf{U}}^T M \hat{\mathbf{U}}^* + \hat{\mathbf{U}}^T K_e \hat{\mathbf{U}}^* + \sum_i \left( \sum_j \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s}{\tau_{ij} s + 1} \hat{\mathbf{U}}_i^T K_i \hat{\mathbf{U}}_j^* \right) = 0 \quad (14)$$

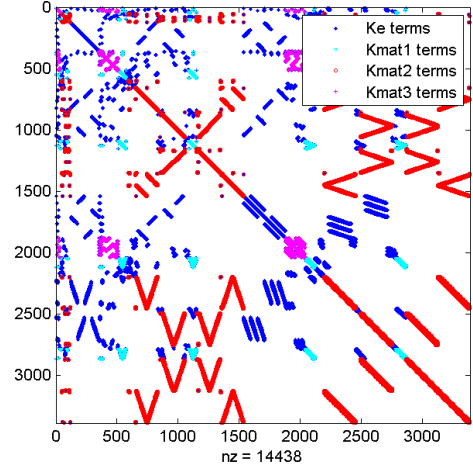


Figure 4. Non-zeros terms of the stiffness matrices for the different parts of the studied structure.

In this case, if the displacement fields  $\hat{\mathbf{U}}$  and  $\hat{\mathbf{U}}^*$  belong to  $\{\mathbf{U}=\mathbf{U}_d \text{ on } \partial\Omega\}$

$$s^2 M \hat{\mathbf{U}} + K_e \hat{\mathbf{U}} + \sum_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s}{\tau_{ij} s + 1} K_i \hat{\mathbf{U}}_i \right) = 0 \quad (15)$$

This formulation is equivalent to the (13) one but in this case the matrices are reduced to the non-zeros terms and then they are all positive and there are fewer difficulties to compute their inverse.

### State space formulation

Equation (13) is not in a classical form in order to be solved. Two ways can be considered to solve such kind of equation : the first one is to use a specific algorithm to extract the roots and associated vectors, see for example [9]; the second one is to transform the problem in order to obtain a generalized eigenvalue problem. This has been done in several papers before: for example [2] introduce internal state in their formulation to finally obtain such kind of generalized eigenvalue problem.

The first internal state that have been chosen is  $\hat{\mathbf{U}}_i^{(i)} = s \hat{\mathbf{U}}_i^{(i-1)}$ , see [8]. In this case the operators built in the state-space are very badly scaled; It can lead to erroneous results when the number of states is great. The other form that has been proposed is widely influenced by the one proposed by [2]:

$$\hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} = s \hat{\mathbf{U}}_i \text{ and } \hat{\mathbf{U}}_i^{(j+1)} = \frac{\tau_{ij}}{\tau_{ij} s + 1} \hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} \quad (16)$$

$$s M \hat{\mathbf{U}}^{(1)} + K_e \hat{\mathbf{U}} + \sum_i \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} K_i \hat{\mathbf{U}}_i^{(j+1)} \right) = 0$$

The state-space formulation obtained with (16) is :

$$s \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(1)} \\ \hat{U}_1^{(2 \dots n_1)} \\ \vdots \\ \hat{U}_m^{(2 \dots n_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -A_1 & \dots & -A_m \\ 0 & d(T_1) & -I & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & d(T_m) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(1)} \\ \hat{U}_1^{(2 \dots n_1)} \\ \vdots \\ \hat{U}_m^{(2 \dots n_m)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Where

$$\begin{aligned} \hat{U} &= [\hat{U}_0 \hat{U}_1 \dots \hat{U}_m]^T \\ \hat{U}^{(1)} &= [\hat{U}_0^{(1)} \hat{U}_1^{(1)} \dots \hat{U}_m^{(1)}]^T \text{ and } d(T_i) = \begin{bmatrix} \tau_{11} I & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 \\ \tau_{1n_1} I & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \tau_{m1} I \\ 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \tau_{mn_m} I \end{bmatrix} \\ \hat{U}_1^{(2 \dots n_1)} &= [\hat{U}_1^{(2)} \dots \hat{U}_1^{(n_1)}]^T \\ \hat{U}_m^{(2 \dots n_m)} &= [\hat{U}_m^{(2)} \dots \hat{U}_m^{(n_m)}]^T \\ T_i &= \begin{bmatrix} \tau_{i1} I & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{in_i} I \end{bmatrix} \text{ and } A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} K_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{in_i} K_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Equation (17) is very close to the formulation of [2].

## MODAL REDUCTION

The main problem with the last is the size of the state space problem. If the number of terms in each Generalized Maxwell series is equal to  $n$ , the size of the state-space operators is equal to  $(n+1)n_{DOF}$  where  $n_{DOF}$  is the number of degrees of freedom of the initial finite element model. [10] proposed a state space formulation in which the mass and stiffness operators  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_i$  are reduced through a projection in a suitable truncated modal basis.

### Simple Formulation

The first idea is to use the modal basis  $\Psi_\infty$  that have been obtained for the conservative problem, i.e. considering viscoelastic parts as elastic ones and taking the long term moduli into account for the calculus, see figure 3.

$$(s^2 M + K(E, E_{i\infty})) \psi_\infty = 0 \quad (18)$$

Considering this,  $\hat{U} = \Psi_\infty Q$ . Under this assumption, the previous formulation becomes:

$$Q^{*T} \left[ s^2 \underbrace{\Psi_\infty^T M \Psi_\infty}_{m_\infty} + \underbrace{\Psi_\infty^T K \Psi_\infty}_{k_\infty} + \sum_i \left( \sum_j \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s}{\tau_{ij} s + 1} \underbrace{\Psi_\infty^T K_i \Psi_\infty}_{k_{i\infty}} \right) \right] Q = 0$$

Due to the projection, the sparse matrices  $\mathbf{K}_i$  become full and the sizes of  $\mathbf{m}_\infty$ ,  $\mathbf{k}_\infty$  and  $\mathbf{k}_{i\infty}$  are identical and equal to  $\mathbf{N}_{\Psi_\infty}$  the number of eigenvectors that have been retained for the projection. Thus the state variables are simplified:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{(1)} &= s \hat{Q} \\ \hat{Q}_i^{(j+1)} &= \frac{\tau_{ij}}{\tau_{ij} s + 1} \hat{Q}^{(j)} \\ sm_\infty \hat{Q}^{(1)} + k_\infty \hat{Q} + \sum_i \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} k_{i\infty} \hat{Q}_i^{(j+1)} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

This leads to the following state-space formulation:

$$s \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q} \\ \hat{Q}^{(1)} \\ \hat{Q}^{(2 \dots n_1)} \\ \vdots \\ \hat{Q}^{(2 \dots n_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -k_\infty & 0 & -a_1 & \dots & -a_m \\ 0 & d(t_1) & -I & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & d(t_m) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q} \\ \hat{Q}^{(1)} \\ \hat{Q}^{(2 \dots n_1)} \\ \vdots \\ \hat{Q}^{(2 \dots n_m)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

With

$$t_i = \begin{bmatrix} \tau_{i1} I & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{in_i} I \end{bmatrix} d(t_i) = \begin{bmatrix} \tau_{11} I \\ \vdots \\ \tau_{1n_1} I \\ \vdots \\ \tau_{m1} I \\ \vdots \\ \tau_{mn_m} I \end{bmatrix} a_i = [\alpha_{i1} k_{i\infty} \quad \dots \quad \alpha_{in_i} k_{i\infty}]$$

The size of the state space problem is then reduced to  $\mathbf{N}_{\Psi_\infty}(2+(n-1)m)$  where  $m$  is the number of viscoelastic materials.

Résultats sur la poutre

### Common Poles assumption

In order to reduce the computation cost, the number of state may be reduced choosing “common poles” or “common relaxation time” in our identification. Figure 1 shows the Frequency dependence of the three viscoelastic materials identified separately and using the method published by [6] and

[5]. The parameters that have been used are summarized in the next table:

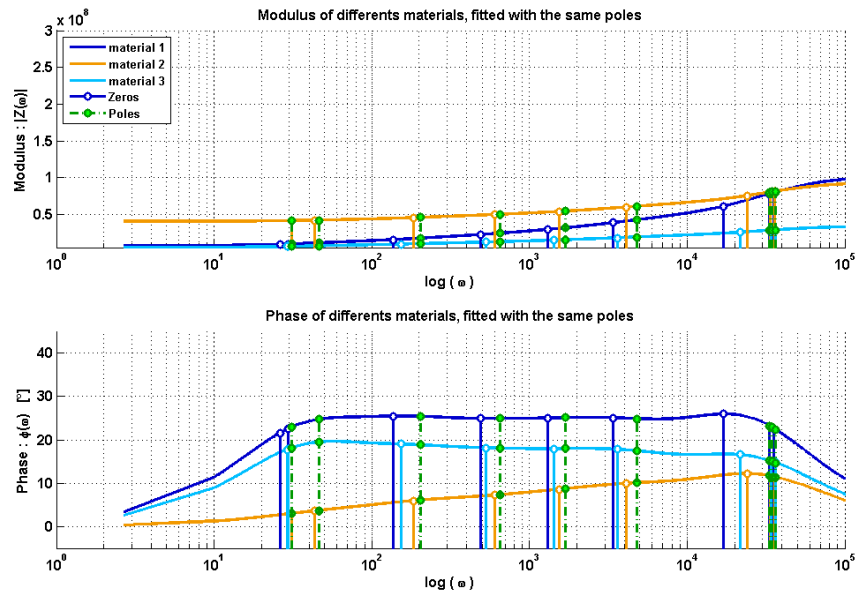
**Table 1 – Numerical properties of the three viscoelastic materials described in Figure 2.**

Material 1		Material 2		Material 3	
$\alpha_{1j}$	$\tau_{1j}$	$\alpha_{2j}$	$\tau_{2j}$	$\alpha_{3j}$	$\tau_{3j}$
8.86E-01	1.88E-01	6.37E-01	1.66E-01	5.70E-01	2.32E-01
1.63E+00	2.28E-02	1.04E+00	1.34E-02	8.92E-01	3.58E-02
3.24E+00	2.23E-03	1.85E+00	1.22E-03	1.45E+00	3.65E-03
5.69E+00	2.21E-04	2.84E+00	1.26E-04	2.18E+00	3.43E-04
1.39E+01	2.59E-05	6.31E+00	2.36E-05	3.78E+00	3.20E-05
$E_\infty$		$E_\infty$		$E_\infty$	
6.15E+06	Pa	9.60E+06	Pa	4.74E+06	Pa

Using “Common Pôles” allows reducing the number of state variables and it is possible to constrain the identification process to obtain the material properties simultaneously, see figure 7. These properties are summarized in Table 3

**Table 3 – Numerical properties of the three viscoelastic materials described in Figure 7.**

$\tau_j$	$\alpha_{1j}$	$\alpha_{2j}$	$\alpha_{2j}$
<b>2.66E-02</b>	4.656E-01	3.119E-01	4.215E-01
<b>5.97E-03</b>	1.211E+00	6.220E-01	7.940E-01
<b>6.16E-04</b>	2.461E+00	1.230E+00	1.316E+00
<b>5.29E-05</b>	3.858E+00	1.850E+00	2.040E+00
<b>2.41E-05</b>	4.885E+00	2.365E+00	1.071E+00
$E_\infty$		$E_\infty$	$E_\infty$
7.37E+06 Pa		2.18E+07 Pa	5.12E+06 Pa



**Figure 5. Frequency dependence of the three viscoelastic materials identified simultaneously**

Due to this assumption the state variable can be defined as:

$$\begin{aligned}\hat{Q}^{(1)} &= s\hat{Q} \\ \hat{Q}^{(j+1)} &= \frac{\tau_j}{\tau_j s + 1} \hat{Q}^{(1)} \\ sm_\infty \hat{Q}^{(1)} + k_\infty \hat{Q} + \sum_i \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} k_{i\infty} \right) \hat{Q}^{(j+1)} &= 0\end{aligned}\quad (21)$$

This leads to the following state space formulation:

$$s \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_\infty & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q} \\ \hat{Q}^{(1)} \\ \hat{Q}^{(2 \dots n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -k_\infty & 0 & -a \\ 0 & d(t) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q} \\ \hat{Q}^{(1)} \\ \hat{Q}^{(2 \dots n)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

With

$$t = \begin{bmatrix} \tau_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_n I \end{bmatrix} \quad d(t) = \begin{bmatrix} \tau_1 I \\ \vdots \\ \tau_n I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad a = \begin{bmatrix} \sum \alpha_{i1} k_{i\infty} & \dots & \sum \alpha_{in} k_{i\infty} \end{bmatrix}$$

The size of the state space problem is then reduced to  $\mathbf{N}_{\Psi\infty}(2+(n-1))$ .

### Projection errors

Due to the reduction through a projection in a suitable truncated modal basis, the complex modes and eigenvalues that have been identified are erroneous. In order to quantify the error, one can compute the residue, including the complex eigenvector and eigenvalue in the equation (13) where the displacement  $\hat{\mathbf{U}} = \Psi_\infty \hat{\Phi}_i$ . Therefore the error for each complex eigenvector is defined by:

$$s_i^2 M \Psi_\infty \hat{\Phi}_i + K \Psi_\infty \hat{\Phi}_i + \sum_i \left( \sum_j \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s_i}{\tau_{ij} s_i + 1} K_i \Psi_\infty \hat{\Phi}_i \right) = \varepsilon_i \quad (23)$$

### Enhancement of the projection basis

In order to reduce the errors on each eigenmodes, one can enhance the projection basis by iterative computation on the projection error (23), see [12] or [13]. Nevertheless these methods are computationally expensive. Here we propose to enhance the basis using the modal basis build with a high frequency modulus:

$$(s^2 M + K(E, E_{iHF})) \Psi_{HF} = 0 \quad (24)$$

Considering this,  $\hat{\mathbf{U}} = [\Psi_\infty \Psi_{HF}] \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{U}} = [\Psi_{\text{Enh}}] \mathbf{Q}$  Under this assumption, the previous formulation becomes:

$$\mathbf{Q}^{*T} \left[ s^2 \underbrace{\Psi_{\text{Enh}}^T M \Psi_{\text{Enh}}}_{m_{\text{Enh}}} + \underbrace{\Psi_{\text{Enh}}^T K \Psi_{\text{Enh}}}_{k_{\text{Enh}}} + \sum_i \left( \sum_j \frac{\alpha_{ij} \tau_{ij} s}{\tau_{ij} s + 1} \underbrace{\Psi_{\text{Enh}}^T K_i \Psi_{\text{Enh}}}_{k_{i \text{ Enh}}} \right) \right] \mathbf{Q} = 0 \quad (25)$$

The error is then calculated using the formula (23).

## CONCLUSIONS

Following the objectives that have been previously introduced, the paper presents ideas to reduce the computational cost of CEA with viscoelastic materials. The analytical developments presented in this paper allow reducing the number of internal states. Moreover the use of an enhanced modal Ritz-basis allows to reduce the errors induced by a projection on a real basis.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to thanks Thierry Pasquet and Remi Lemaire from the CSB division, NVH department of Robert Bosch France for their technical and financial help.

## REFERENCES

- [1] D.F. Golla et P.C. Hughes, "Dynamics of Viscoelastic Structures—A Time-Domain, Finite Element Formulation," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, 1985, p. 897.
- [2] G.A. Lesieutre, E. Bianchini, et A. Maiani, "Finite element modeling of one-dimensional viscoelastic structures using anelastic displacement fields," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, 1996, p. 520-527.
- [3] C. Vasques, R. Moreira, et J. Dias Rodrigues, "Viscoelastic Damping Technologies—Part I : Modeling and Finite Element Implementation," *Journal of advanced research in Mechanical Engineering*, vol. 1, 2010, p. 76-95.
- [4] J. Dion, "Modélisation et identification du comportement dynamique de liaisons hydroélastiques. Saint-Ouen : PHD Thesis," ISMCM, 1995.
- [5] F. Renaud, J. Dion, et G. Chevallier, "Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement," *Mécanique & Industries*, vol. 11, 2010, p. 47-55.
- [6] F. Renaud, J. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, et R. Lemaire, "A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized Maxwell model," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. In Press, Corrected Proof, 2010.
- [7] S. Sorrentino et A. Fasana, "Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, Fév. 2007, p. 839-853.
- [8] S. Thouviot, G. Chevallier, F. Renaud, J. Dion, et R. Lemaire, "Prise en compte des comportements

viscoélastiques dans la simulation dynamique des systèmes de freinage,” *Mécanique & Industries*, vol. 10, 2009, p. 385-396.

- [9] E.M. Daya et M. Potier-Ferry, “A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures,” *Computers & Structures*, vol. 79, Fév. 2001, p. 533-541.
- [10] M.A. Trindade, A. Benjeddou, et R. Ohayon, “Modeling of Frequency-Dependent Viscoelastic Materials for Active-Passive Vibration Damping,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 122, 2000, p. 169.
- [11] J. Batoz et G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*, 1995.
- [12] A. Bobillot, “Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d’Ariane 5.,” Ecole Centrale, 2002.
- [13] A. Bobillot et E. Balmes, “Iterative Computation of Modal Sensitivities,” *AIAA Journal*, vol. 44, 2006, p. 1332-1338.



## Annexe C

# Instabilités provoquées par le frottement

### Contenu du chapitre

Les principaux articles ou actes de congrès sont repris dans cette partie, soient :

- [1] S. Thouviot, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Dynamic computation of braking systems including viscoelastic behaviours. *Mécanique & Industries*, 10(5) :385–396, November 2009.
- [2] H. Festjens, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study. *Applied Acoustics*, 73(11) :1121–1128, November 2012.
- [3] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion, and G. Taudiere. Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, August 2012.





# Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system

Franck Renaud <sup>a,\*</sup>, Gaël Chevallier <sup>a</sup>, Jean-Luc Dion <sup>a</sup>, Guillaume Taudière <sup>b</sup>

<sup>a</sup> LISMMA-EA2336, Institut Supérieur de Mécanique de Paris, 3 Rue Fernand Hainaut, 93400 Saint Ouen, France

<sup>b</sup> BOSCH, Chassis Systems Brakes, 126 Rue de Stalingrad, 93700 Drancy, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 17 December 2011

Received in revised form

21 June 2012

Accepted 22 June 2012

Available online 1 August 2012

### Keywords:

Squeal

Brake system

Motion capture

Operating deflection shape

## ABSTRACT

The operating deflection shape of a pad during squeal noise is measured on a real brake system with three-axis accelerometers. A time-frequency analysis is performed that highlights the dependency of squeal on the hydraulic pressure of the system and shows that squeal occurs simultaneously with harmonic components. The operating deflection shape of this pad before and during squeal is then visualized using interpolation, showing the predominance of bending motion. Finally, the pad motions observed are compared to the real modal basis of a detailed Finite Element model.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Many studies have been performed in view to modeling the squeal noise phenomenon. Two different analysis methodologies using the Finite Element method are available for predicting disc brake squeal, namely complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis. However, the literature is less abundant regarding experimental work. Some of the authors of interesting work on the topic have chosen to work on simplified test rigs. Giannini et al. [1] designed a simplified squeal bench with a caliper composed of beams on which brake pads were fixed. They measured the operational deflections with a laser vibrometer. The squeal noises observed were obtained at low speed – 5–30 rpm – and exhibited harmonics. The frequency of the squeal was dependent on the normal load and the angle of the leading edge of the pad. During squeal occurrences, out of plane motions were in phase quadrature with in plane movements. The squeal noises occurred at frequencies close to those of the normal modes of the system, including modes involving the in-plane movement of the pads. Giannini showed that squeal does not require an established stick-slip limit cycle. It is usually attributed to the coupling of brake normal modes due to friction between the pads and the disc (see Giannini and Sestieri [2]). However, in another study Giannini and Massi [3] observed modes of a rotating disc that could not be predicted with a linear model. They concluded that non-linear aspects of the contact between disc and pad must be taken into account. Some of the conclusions of these works are well summarized in the paper by Akay et al. [4]. More recently, Butlin and Woodhouse [5] proposed a “systematic experimental study of squeal initiation” using a simplified test bench designed by Duffour and Woodhouse [6]. As with the work cited previously, the system consisted of two parts with a sliding contact at

\* Corresponding author. Tel.: +33 1 49 45 29 17; fax: +33 1 49 45 29 29.

E-mail addresses: [franck.renaud@supmeca.fr](mailto:franck.renaud@supmeca.fr) (F. Renaud), [gael.chevallier@supmeca.fr](mailto:gael.chevallier@supmeca.fr) (G. Chevallier), [jeanluc.dion@supmeca.fr](mailto:jeanluc.dion@supmeca.fr) (J.-L. Dion), [guillaume.taudiere@fr.bosch.com](mailto:guillaume.taudiere@fr.bosch.com) (G. Taudière).

a single point. Numerous parameters such as contact pressure and sliding velocity were studied. The authors also provided an original study on the repeatability of the phenomenon.

All these works have developed simplified test benches to make interpreting the phenomena observed easier and facilitate updating of the models. This goal has now been partially achieved. However, some phenomena are specific to industrial brakes, in particular the size of a real plate provides a large contact area, leading to effects very different from those that can be seen with a point contact. AbuBakar et al. [7] pointed out that due to the topography of real brake pads, the effective contact area of a real brake pad is small in comparison to the whole area. Thus pad topography must be measured and taken into account in the geometric definition to predict disc brake squeal using complex eigenvalue analysis (cf. AbuBakar and Ouyang [8]). Furthermore, complex eigenvalue analysis allows finding all the unstable frequencies in one run, but only a few are observed in experiments. Dynamic transient analysis is able to predict true unstable frequencies but it is very time consuming. AbuBakar and Ouyang [9] have shown that care must be taken when formulating the contact model for these two different analysis methodologies.

The energy of the squeal stems from the friction between the pads and disc, thus the pads play an important role in the squeal noise phenomena. For example, chamfered and slotted pads can reduce occurrences of squeal (cf. Saw et al. [10]). Liu et al. [11] have described a method for designing chamfers based on knowledge of free-free pad modes with a frequency close to that of squeal noise. In order to improve realistic models and obtain better understanding of the phenomenon, it is necessary to capture detailed information on the operating deflection shape of the pads. Although many studies, such as that of Lorang et al. [12], compare unstable frequencies between models and experiments, few have focused on the operating deflection shapes of realistic braking devices. The first technique that comes to mind is the laser velocimetry technique, but it only allows visualizing stationary motion. Unfortunately, squeal is a more transient phenomenon than a stationary one. Fieldhouse and Newcomb [13] used a laser technique, namely double-pulse holography, to visualize the motion of a disc brake system. They observed that the trailing edge of the finger pad exhibited a swashplate type motion while the leading edge was in pure bending. The double-pulse holography technique requires a long time to set up before observation. Moreover, it does not allow observation of the operating deflection shape of hidden parts, such as the piston pads, a problem overcome using three-axis accelerometers that allow observing the transient motion of such parts.

Piston pad motion is observed in a real brake system immediately before squeal noise occurrence and during squeal. These motions are compared together and with the normal modes of a Finite Element model.

## 2. Test bench description and time-frequency analysis

The experimental set-up consisted of a real brake system without knuckle and with a disc rotated by an electric motor (see Figs. 1 and 2). The disc was driven at 2.62 Hz with a controller operating at a sampling frequency of 300 Hz. During these tests, the inner<sup>1</sup> pad was instrumented with six three-axis accelerometers. As shown in Fig. 3, the sensors were all stuck on the backplate<sup>2</sup> with Cyanolite glue and placed as far as possible from each other: two at the leading edge (accelerometers 1 and 6), two at mid-length (accelerometers 2 and 5) and two at the trailing edge (accelerometers 3 and 4), see Fig. 3. The accelerometers weighed between 3 g and 10 g and the pad weighed about 500 g. Their position on the backplate allows describing bending and torsion motions. The sampling frequency of the data acquisition hardware was set at  $f_s = 16,384$  Hz. An anti-aliasing filter was used, thus the upper frequency limit for frequency analysis was 6400 Hz.

Here we present the results of a test at a rotation speed of about 157 rpm (about 2.6 Hz). The leading edge of the pad is on the left side and the trailing edge on the right, see Fig. 3. The squeal noise was obtained by changing the brake pressure manually from 0 to 10 bars. An approximation of the brake pressure level was displayed on the control monitor but it was impossible to acquire this signal during the test. The unstable vibration leading to squeal occurred at frequencies between 1500 and 2000 Hz, depending on the brake pressure.

### 2.1. Sequence of squeal occurrence

The top of Fig. 4 shows the acceleration versus time measured by the sensor number 6 along the z-axis (see numbering in Fig. 3). The Discrete Short Time Fourier Transform (DSTFT) of the same signal is presented at the bottom of Fig. 4. It provides the main frequency component of a signal at a given time and was computed using a sliding Hamming window in order to improve detection capabilities.<sup>3</sup> Each window consisted of 1024 points, corresponding to a time period of 0.0625 s with an overlap of 50% between successive windows. The color scale represents the magnitude of the acceleration in logarithmic scale. The approximative brake pressure level is reported in Fig. 4.

The time signal shown in Fig. 4 can be divided into eight time periods:

1. From 0 to 2.8 s: The brake pressure is nil but the pad scrapes the disc lightly, exciting the brake at all frequencies. Disc thickness variations generate acceleration variations as a function of the revolutions of the disc.

<sup>1</sup> The inner pad was the pad between the disc and the vehicle.

<sup>2</sup> The backplate is the metal plate behind the lining.

<sup>3</sup> The Matlab ® function “spectrogram” was used.

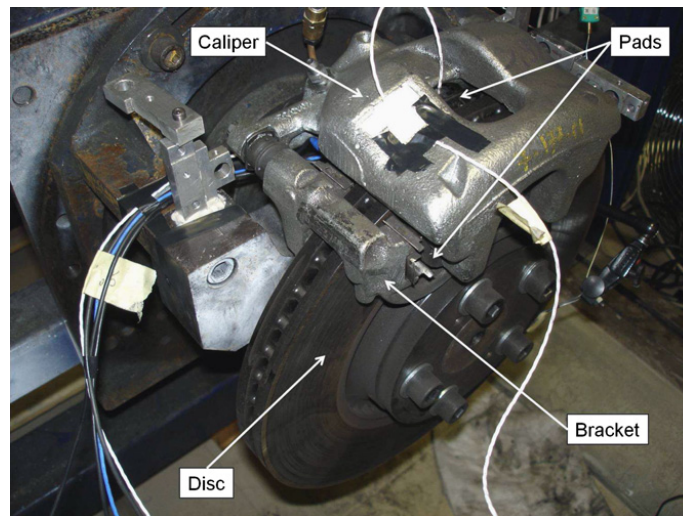


Fig. 1. Test bench.

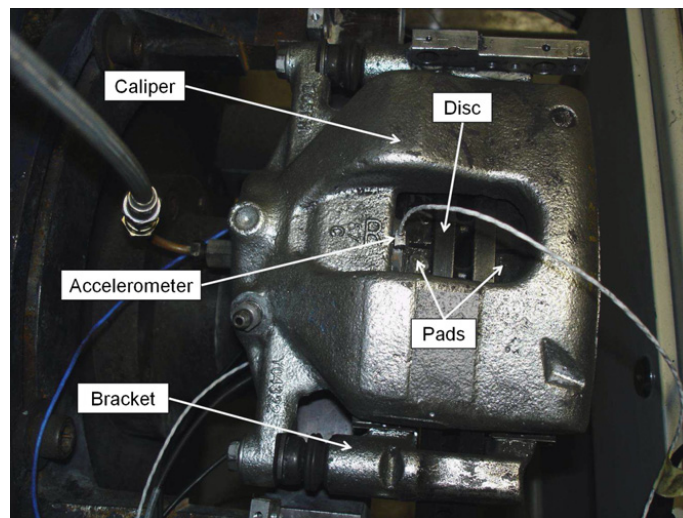


Fig. 2. Test bench.

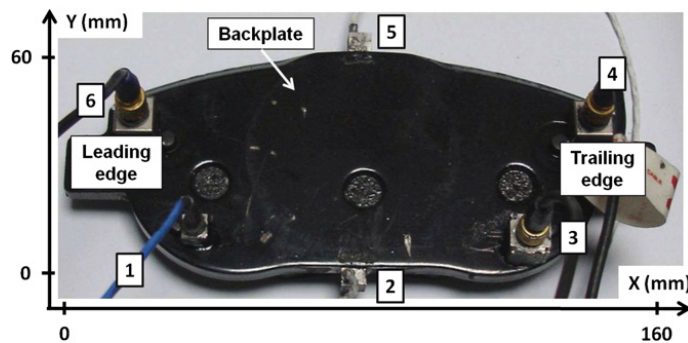
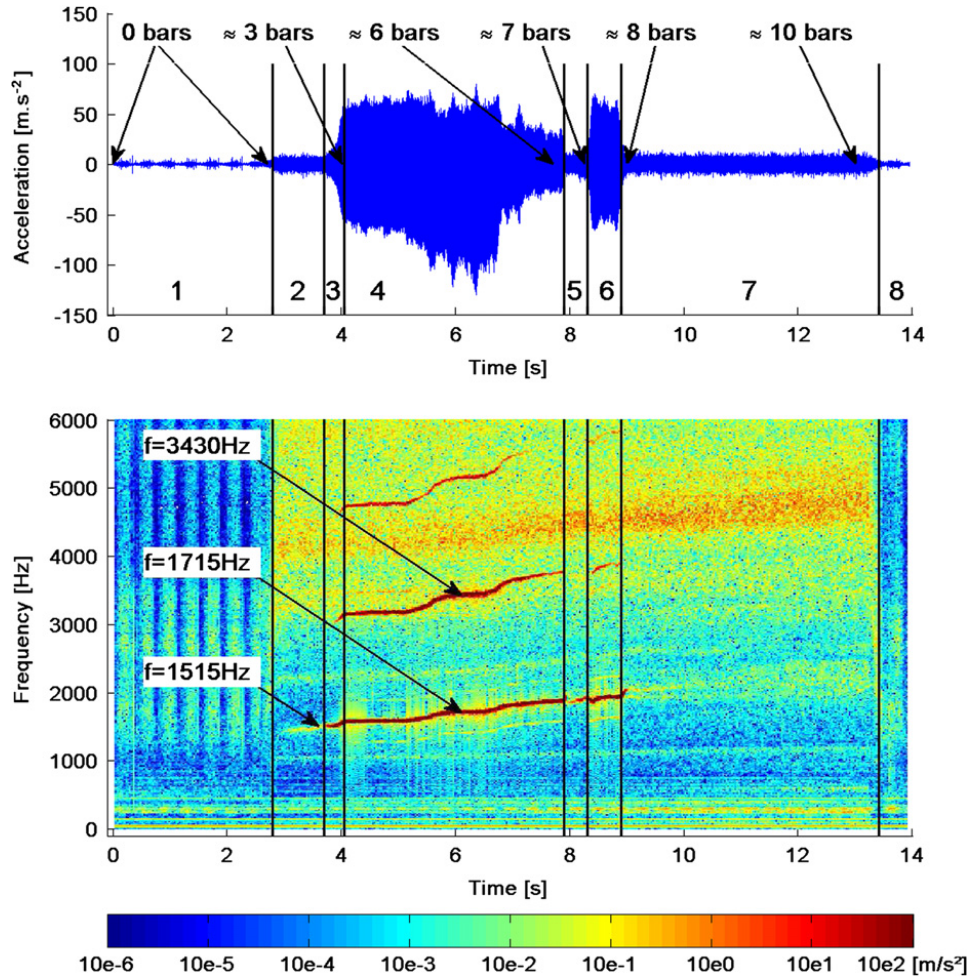


Fig. 3. Backplate of the piston pad with 6 three-axis accelerometers.

2. From 2.8 to 3.7 s: The brake pressure is set. All frequencies above 3000 Hz are excited. Squeal has not yet occurred although there is already a small frequency component around 1515 Hz.
3. From 3.7 to 4.05 s: At 3.7 s, the acceleration signal starts to diverge. At 4.05 s the brake pressure reaches 3 bars and the squeal noise occurs with a strong 1515 Hz component in the DSTFT.
4. From 4.05 to 7.9 s: The pressure increases from 3 to 6 bars. The squeal noise continues up to 7.9 s. It is composed of three main frequencies, a fundamental (H1) evolving from 1500 to 1900 Hz and harmonics (H2 and H3).





**Fig. 4.** The acceleration versus time measured by the sensor number 6 along the z-axis at the leading edge is shown at the top whereas the Discrete Short Time Fourier Transform (DSTFT) of the same signal is shown at the bottom. The color scale represents the magnitude of the acceleration in logarithmic scale. The signal can be divided into eight time periods described in Section 2.1. The evolution of the brake pressure is indicated. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this article.)

5. From 7.9 to 8.3 s: The pressure increases from 6 to 7 bars and the squeal noise disappears along with the harmonics. Although it is no longer heard, the fundamental frequency of the squeal is still latent with a lower level of magnitude.
6. From 8.3 to 8.9 s: The pressure increases from 7 to 8 bars and the squeal noise reappears. Simultaneously the harmonics reappear with a lower level than previously.
7. From 8.9 to 13.4 s: The pressure increases and the squeal disappears again. This time, the frequency of the fundamental latent squeal disappears gradually.
8. From 13.4 to 14 s: The pressure is released at the end of the test and the pad scrapes the disc lightly, as it did at the beginning.

The presence of harmonics in the accelerometer signal during squeal indicates the existence of non-linearities. The authors would like to point out that in this test, the stick-slip phenomenon was not responsible for the squeal noise. The maximum acceleration was read by sensor 1 and remained below  $200 \text{ m s}^{-2}$  for a frequency higher than 1700 Hz. The vibrating velocity of the pad backplate was  $V_{\text{pad}} < 200 / (2\pi \times 1700) = 0.019 \text{ m s}^{-1}$ . However, the acceleration was measured on the backplate and not on the contact area, thus the velocity of the pad on the contact area was slightly higher. Considering a rigid disc, it can be estimated that the velocity of the pad on the contact area was about  $V_{\text{pad}} \approx V_x + E_{\text{pad}} / G_{\text{pad}} \times V_z \approx 0.019 \times (1 + E_{\text{pad}} / G_{\text{pad}}) \approx 4 \times 0.019 \text{ m s}^{-1}$  with  $E_{\text{pad}}$  its Young modulus and  $G_{\text{pad}}$  its shear modulus. Considering the inner radius of the disc equal to 10 cm, the speed of the disc was  $V_{\text{disc}} = 0.1 \times 2\pi \times 2.62 = 1.65 \text{ m s}^{-1}$ . The speed of the pad along the x-axis was approximately 20 times lower than the tangential velocity of the area of the disc in contact with the pad. The relative speeds between pad and disc never canceled each other, thus the pad could not stick to the disc and the occurrence of the stick-slip phenomenon was not possible.

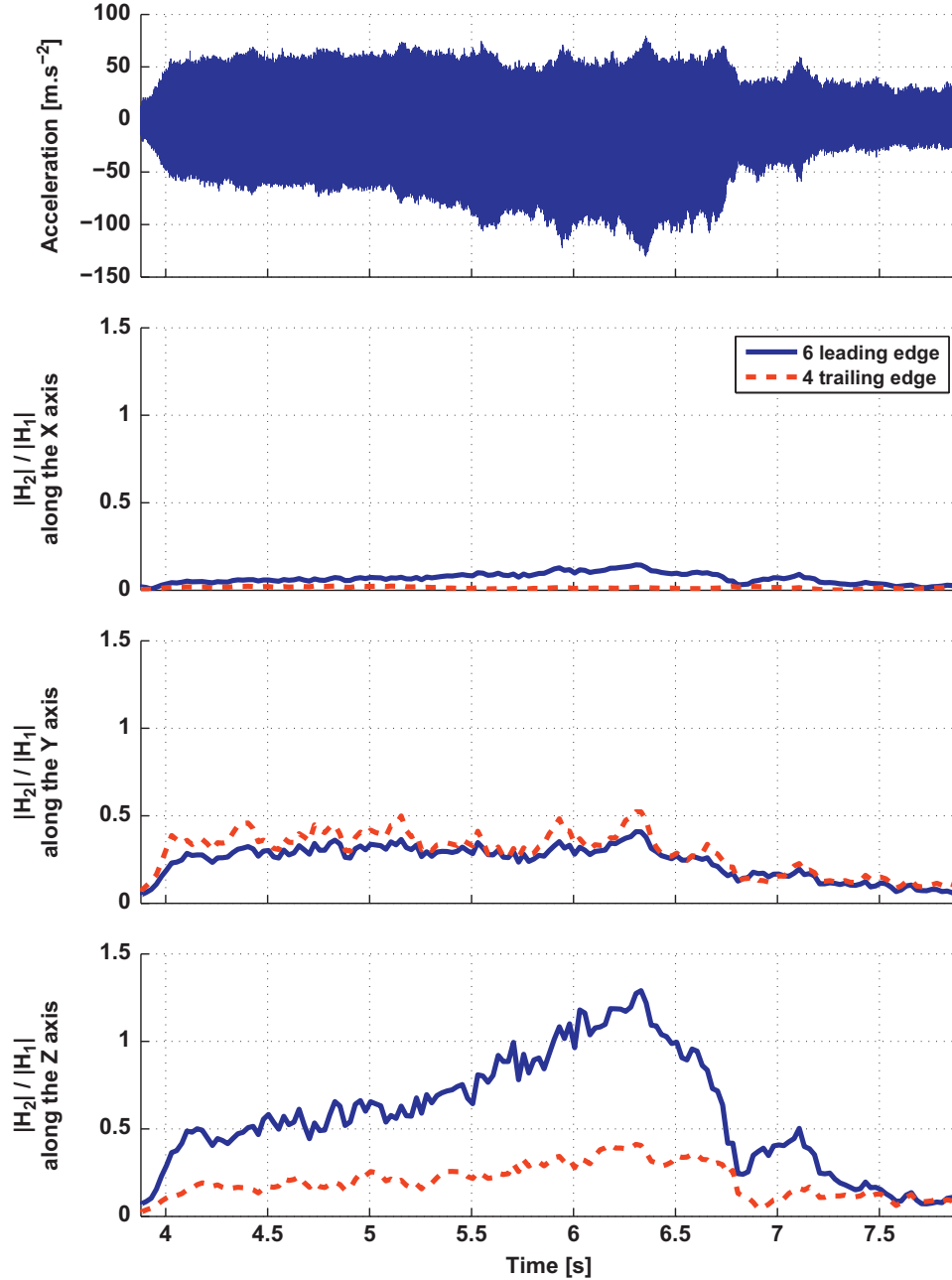
It should be highlighted that the squeal frequency increased with brake pressure during the fourth time period. One of several possible explanations is that contact stiffness increases with brake pressure, meaning that the contact stiffness between the piston and the pad or between the pad and the disc would be non-linear.

## 2.2. Harmonic rate analysis

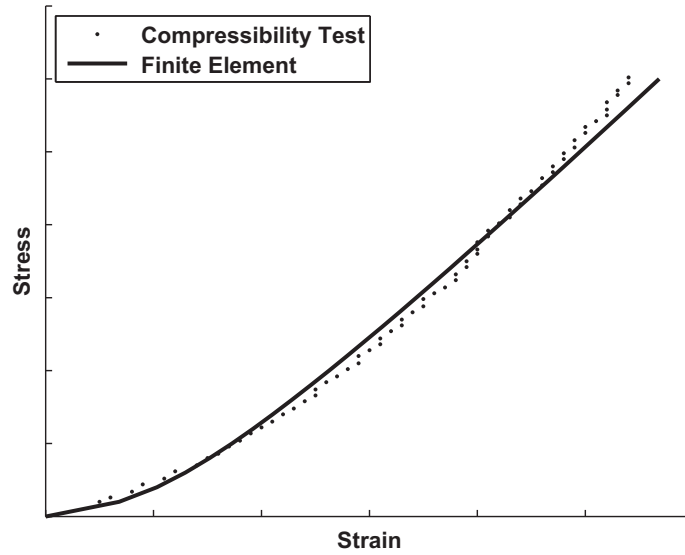
Fig. 4 shows that the magnitude of acceleration at the second harmonic,  $H_2$ , is about 10 times stronger than the magnitude of acceleration at the third harmonic,  $H_3$ . Thus only the magnitude,  $H_2$ , of the second harmonic is compared to the magnitude of acceleration,  $H_1$ , at the fundamental frequency  $f_{\text{fundamental}}$ .

The harmonic rates  $H_2/H_1$  are computed between  $t=3.9$  s and  $t=7.9$  s, using Eq. (1), with a sliding Hanning window,  $w_N[k]$ , applied to time signals. The width of the windows is 0.1 s and the overlap is 75%, with  $N$  being the number of samples in the window.

$$\frac{H_2}{H_1}[n] = \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} w_N[k-n] \times \text{acc}[k] \times e^{-4i\pi km} \right|}{\left| \sum_{k=0}^{N-1} w_N[k-N] \times \text{acc}[k] \times e^{-2i\pi km} \right|} \quad \text{with } m = f_{\text{fundamental}}/f_s \quad (1)$$



**Fig. 5.** Evolution of harmonic rates  $H_2/H_1$  versus time of accelerometer measurements during the squeal occurrence of the fourth time period (from 3.9 to 7.9 s).  $H_1$  is the acceleration magnitude at the fundamental frequency and  $H_2$  is the acceleration magnitude at the frequency of the second harmonic. A zoom of the acceleration measured by the sensor No. 6 along the z-axis is represented at the top. Below are represented the evolutions of the harmonic rates for sensors 4 and 6 classified according to the direction of observation.



**Fig. 6.** The measured compressibility of the whole pad (dots) and the compressibility of the whole pad computed using a Finite Element model (solid line). An exponential law is considered in the FE model. The axes are not filled because the values are confidential.

Fig. 5 shows the evolution of harmonic rates  $H_2/H_1$  versus time during the occurrence of squeal in the fourth time period (from 4.05 to 7.9 s). A zoom of the acceleration measured by sensor No. 6 along the z-axis is shown at the top of Fig. 5. Below are represented the evolutions of harmonic rates classified according to the direction of observation, for sensors 6 and 4, at the leading edge and at the trailing edge.

These harmonic rates are strong according to the z-axis, the normal direction to the disc, and to the y-axis, the radial direction. On the contrary, the tangential component, the x-axis, does not have strong harmonic components. This interesting difference between directions as well as the cause of the harmonics have not yet been explained. The investigation of relative displacements between the pad and the other mechanical parts should provide an answer in future work. However, the lack of harmonics along the x-axis may indicate that the behavior of the pad abutment contacts stays fairly linear in this direction. The authors would like to point out that non-linearities along the z-axis induce non-linear friction forces in the xy-plane due to friction.

The effective contact surface between pad and disc has been proved to be small in comparison to the nominal surface of the pad (cf. AbuBakar et al. [7]). Moreover the effective contact surface is divided into several local contacts. These local contacts can be modeled classically on the basis of Hertz's theory according to which the effective contact surface depends on the normal force. This dependence leads to a non-linear contact stiffness. The compressibility of the whole pad was measured (cf. Fig. 6) and seemed to obey an exponential law. This non-linear behavior may be due to the pad material or to the contact. Thus the non-linear stiffness between the pad and the disc is one possible explanation for the harmonics observed in the z-axis and in the y-axis due to friction.

### 3. Pad operating deflection shape

#### 3.1. Before the squeal noise

The motions of the backplate pad can be interpolated using the six three-axis accelerometers stuck on it. The interpolation is computed by Finite Element interpolation (cf. Dhatt et al. [14]). The element is a quadrilateral composed of six nodal variables with a quadratic interpolation along the x-axis and a linear interpolation along the y-axis (cf. Fig. 7). The polynomial basis is  $\langle P(x,y) \rangle = \langle 1, x, y, xy, x^2, x^2y \rangle$ . Displacements are interpolated using the following equation:  $u(x,y) = \langle N(x,y) \rangle \{u_n\}$ . Here  $\{u_n\}$  is the vector of the sensor displacements computed by integrating the acceleration measurements. Interpolation functions are computed using the following equation:  $\langle N(x,y) \rangle = \langle P(x,y) \rangle [P_n]^{-1}$ . Here,  $[P_n]$  is computed by evaluating the polynomial basis at each sensor position (cf. Eq. (2)).

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & x_1^2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & x_2^2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & x_3^2 & x_3^2 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & x_4^2 & x_4^2 y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5 y_5 & x_5^2 & x_5^2 y_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6 y_6 & x_6^2 & x_6^2 y_6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Let us focus on the pad motion immediately before the onset of squeal, i.e. between  $t=3.6$  s and  $t=3.8$  s. According to the DSTFT of Fig. 4, the acceleration signal is mainly composed of noise above 3000 Hz plus a 1515 Hz frequential component. Since

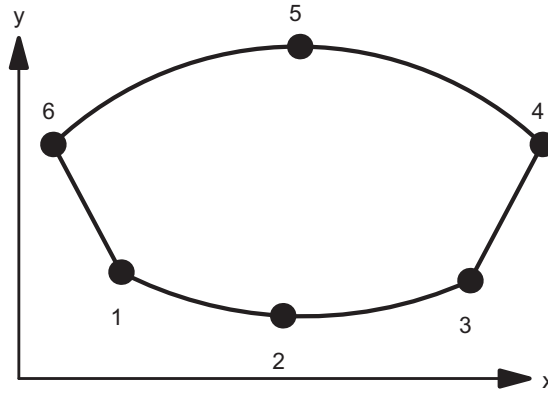


Fig. 7. Quadrilateral element composed of six nodal variables with a quadratic interpolation along the x-axis and a linear interpolation along the y-axis.

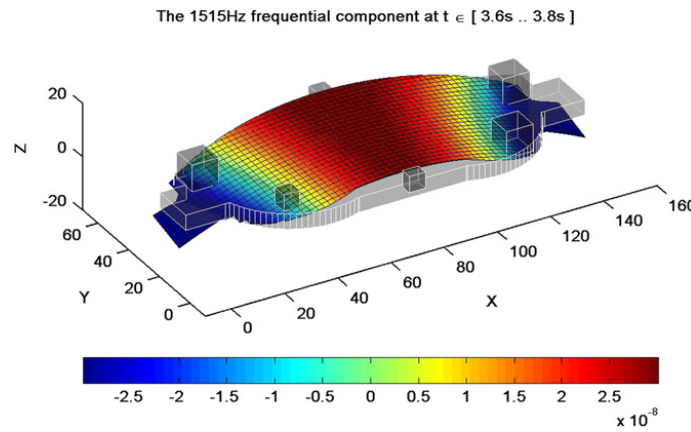


Fig. 8. Motion of the pad backplate immediately before the occurrence of squeal noise. In order to see the motion of the pad between  $t=3.6$  s and  $t=3.8$  s at the fundamental frequency (1515 Hz), the acceleration measurements were extracted by applying Eq. (3). The color scale represents the magnitude of displacement in meters along the z-axis. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this article.)

this 1515 Hz frequential component leads to squeal noise in the fourth time period, it is clearly due to an unstable mode of the brake system. The frequential components of the acceleration measurements,  $acc_{pad}$ , at 1515 Hz are extracted using Eq. (3) by applying a Hanning window between  $t=3.6$  s and  $t=3.8$  s. Then, they are integrated to compute the vector of sensor displacements:  $\{u_n\} = -acc_{pad}/(2\pi mf_s)^2$ . The motion of the pad at 1515 Hz is shown in Fig. 8.

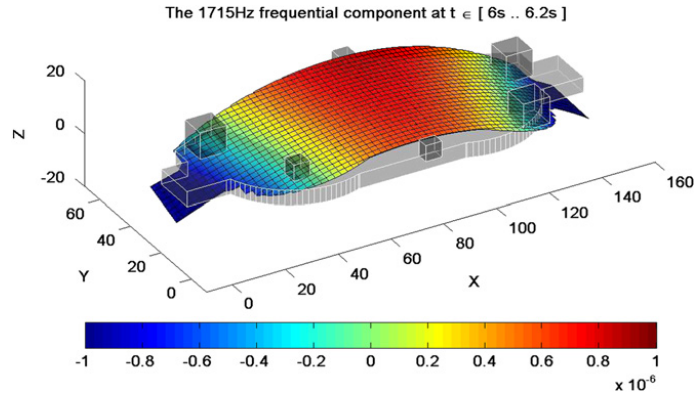
$$acc_{pad} = \sum_{k=0}^{N-1} w_N[k] \times acc[k] \times e^{-2i\pi km} \quad \text{with } m = 1515/f_s \quad (3)$$

The pad motion shown in Fig. 8 is a bending motion. Moreover, the acceleration spectrum values at 1515 Hz obtained thanks to Eq. (3) are complex. This indicates movement propagated by the pad which can be seen on the video available in the online version of the paper (cf. Fig. 8).

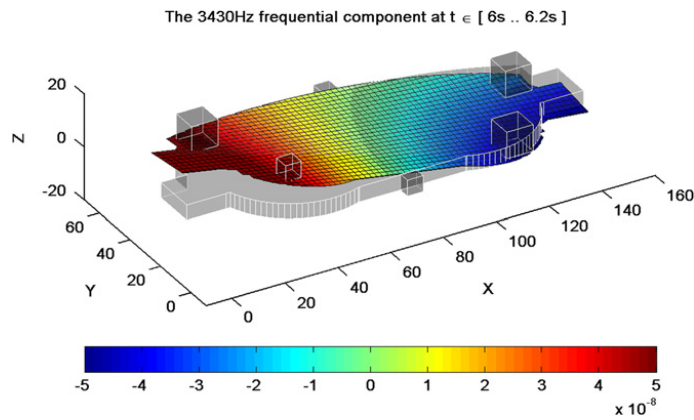
### 3.2. During the squeal noise

Let us focus on the pad motion during the squeal noise, between  $t=6.0$  s and  $t=6.2$  s. According to the DSTFT of Fig. 4, the acceleration signal is mainly composed of three frequential components, the fundamental at 1715 Hz and two harmonics at 3430 Hz and 5145 Hz. Thus the pad motion during squeal occurrence is the sum of motions at the fundamental frequency and the harmonics frequencies. The maximum displacement magnitude occurs at the fundamental frequency. Thus the whole motion is mainly represented by the motion at the fundamental frequency. As done before in Section 3.1, the frequential components of the acceleration measurements at 1715 Hz and 3430 Hz are extracted using Eq. (3), now with  $m = 1715/f_s$  for the fundamental and  $m = 3430/f_s$  for the second harmonic. They are then integrated to compute the vector of sensor motions:  $\{u_n\}$ . These pad motions are both represented in Figs. 9 and 10.

The Modal Assurance Criterion (MAC) defined by Eq. (4) is a measurement of the degree of linearity between two vectors  $\varphi_i$  and  $\psi_j$  (cf. Allemang [15]). On the one hand, the fundamental pad motion during the squeal (cf. Fig. 9) is the same bending motion as immediately before the squeal (cf. Fig. 8). The MAC between these two motions is 88.6%. However, during the



**Fig. 9.** Motion of the pad backplate during the occurrence of squeal noise. In order to see the motion of the pad between  $t=6.0$  s and  $t=6.2$  s at the fundamental frequency (1715 Hz), the acceleration measurements were extracted using Eq. (3). The color scale represents the magnitude of displacement in meters along the z-axis. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this article.)



**Fig. 10.** Motion of the pad backplate during the occurrence of squeal noise. In order to see the motion of the pad between  $t=6.0$  s and  $t=6.2$  s, at the second harmonic (3430 Hz), the acceleration measurements were extracted using Eq. (3). The color scale represents the magnitude of displacement in meters along the z-axis. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this article.)

occurrence of squeal, the amplitude of the motion was a hundred times higher. Moreover, by separating the direction of observation, the authors obtained a MAC value of 99.17% for the x-axis, 90.7% for the y-axis and 96.3% for the z-axis. On the other hand, the second harmonic pad motion between  $t=6.0$  s and  $t=6.2$  s was composed of a torsion plus a bending motion, mostly involving the leading edge (cf. Fig. 10). As seen previously, the acceleration spectrum values at 1715 Hz and 3430 Hz obtained using Eq. (3) are complex. This denotes a propagation movement of the pad. This can be seen on the videos available in the online version of the paper (cf. Figs. 9 and 10).

$$MAC_{ij} = \frac{|\varphi_i \overline{\varphi_j}|^2}{\varphi_i \overline{\varphi_i} \varphi_j \overline{\varphi_j}} \quad (4)$$

#### 4. Discussion on the consequences on the Finite Element tool

It has now become commonplace to use Finite Element (FE) approaches for squeal prediction. There are typically two different methodologies, namely, complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis (cf. AbuBakar and Ouyang [9]). Both are very time-consuming when used for a very large FE model, i.e. with more than 100,000 degrees of freedom. Thus a classical approach is to reduce the size of an FE model by projection on its modal basis. Modal bases are computed using real eigenvalue analysis and are considered to represent the behavior of FE models well. Here, the authors investigate and discuss the correlation between the modal basis of a detailed FE model and the pad motions observed during the experiment.

Fig. 11 shows a Finite Element model of the whole system. This model uses 94,877 10-node quadratic elements (C3D10) and 512,346 degrees of freedom. Each mechanical part of the brake system is recalibrated with an experimental frequency response so that the deviation of the natural frequency component is lower than 2%. The entire brake system model is also recalibrated for frequency. The contact law between the pads and the disc is exponential. This law was calibrated so that the FE model could reproduce the compressibility test (cf. Fig. 6). The real normal modes of the FE model were computed in two steps in ABAQUS. First, the brake pressure and the rotational speed of the disc were simulated in a non-linear static



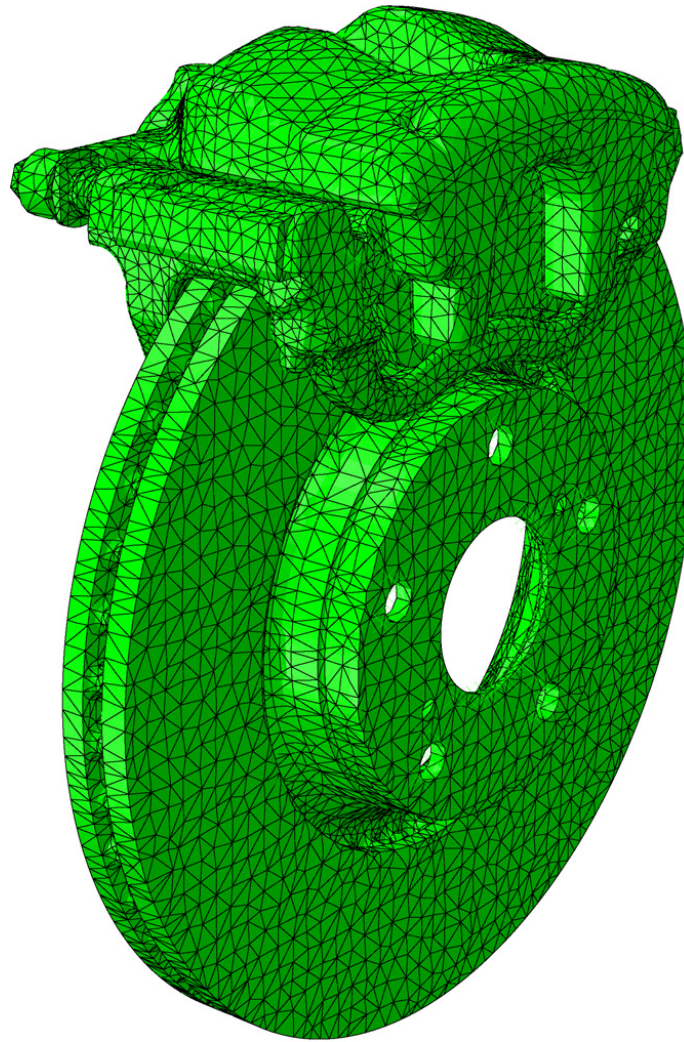


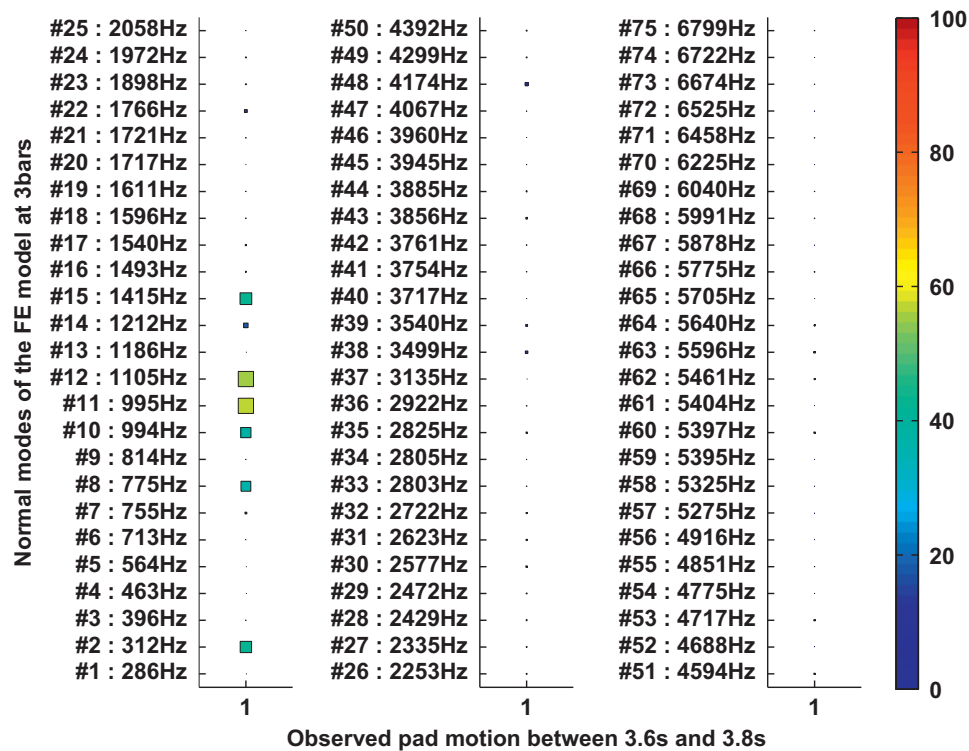
Fig. 11. Finite Element model of the brake system.

analysis to obtain the contact pressure field between the pads and the disk. Second, the stiffness was linearized in order to compute a real eigenvalue analysis.

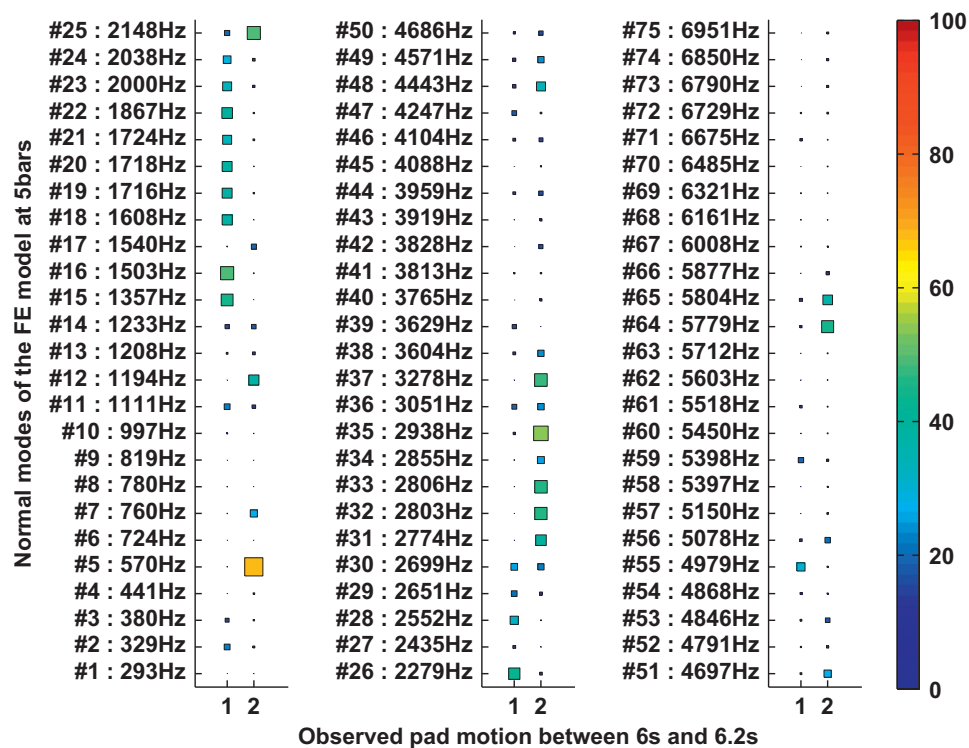
The real eigenvectors of the FE model with a brake pressure of 3 bars were computed. These eigenvectors were restricted to the degrees of freedom corresponding to the sensor positions. Note that such restricted vectors no longer form a basis because they lose their orthonormality. The restricted eigenvectors  $\varphi_i$  were then compared to the vectors of the pad motions observed  $\psi_j = \{u_n\}_j$  using the MAC (cf. Eq. (4)). Fig. 12 shows the MAC of these eigenvectors with the pad motion at 1515 Hz between  $t=3.6$  s and  $t=3.8$  s. No eigenvector of the FE model at 3 bars clearly corresponded to the pad motion observed just before the squeal noise occurred. The best MAC value was 57%, obtained for mode 11. This mode had an eigenfrequency of 995 Hz far from the 1515 Hz of the pad motion observed. Although better MAC values could have been expected, several eigenvectors had a significant MAC value. Thus the pad motion observed could be represented with a linear combination of several restricted eigenvectors, for instance with modes 2, 8, 10, 11, 12 and 15 (cf. Fig. 12).

The real eigenvectors of the FE model with a brake pressure of 5 bars were computed. Fig. 13 shows the MACs of these eigenvectors with the pad motions at 1715 Hz and 3430 Hz between  $t=6.0$  s and  $t=6.2$  s. No eigenvector of the FE model clearly corresponded to the pad motions observed during the occurrence of squeal noise. The best MAC for the fundamental frequency was 46%, obtained for mode 16. The best MAC for the second harmonic frequency was 68%, obtained for mode 5. Once again, these modes had eigenfrequencies very different from the observations. Although better MAC values could have been expected, several eigenvectors had a significant MAC value. Thus the pad motions observed could be represented with a linear combination of several restricted eigenvectors, for instance with modes 15, 16, 18, 19, 20, 22 and 26 for the fundamental frequency and with modes 5, 25, 32, 33, 35, and 37 for the second harmonic (cf. Fig. 12).

These deviations could have several explanations. First of all, the true pad topography was not taken into account, although this pad property is known to be of great importance (cf. AbuBakar and Ouyang [8]). Second, uncertainty in contact joints such as between the caliper and the bracket could have led to poor stiffness modeling of these contacts. Third, the effective brake pressure during the experiment was not known accurately. For example, the brake pressure



**Fig. 12.** Before squeal occurrence, i.e. between 3.6 s and 3.8 s. Modal Assurance Criterion between the normal modes of the FE model at 3 bars and the pad motion observed. The color bar represents the value of the MAC in %. The fundamental frequency is 1515 Hz and denoted by 1. The best MAC value is 57%, is obtained for mode 11. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this article.)



**Fig. 13.** During the squeal occurrence, i.e. between 6.0 s and 6.2 s. The Modal Assurance Criterion between the normal modes of the FE model at 5 bars and the pad motion observed. The color bar represents the value of the MAC in %. The fundamental frequency is 1715 Hz and is denoted by 1. Its best MAC value is 49%, obtained for mode 16. The second harmonic frequency is 3430 Hz denoted by 2. Its best MAC value is 68%, obtained for mode 5. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this article.)

between  $t=3.6$  s and  $t=3.8$  s was  $3 \pm 0.5$  bar. Thus the FE model may not have accounted for the same brake pressure. Finally, although the movements observed were complex, the comparison was performed over a real modal basis and not over a complex modal basis. Thus these comparisons show that attention must be paid to the modeling of the effective contact surfaces. Although the MAC values were low, several eigenvectors had a significant MAC value. Thus pad motions should be represented with a linear combination of eigenvectors of real modal bases. Hence real modal bases seem suitable for model reduction before performing transient analysis or complex eigenvalue analysis. Moreover, before carrying out model reduction, Figs. 12 and 13 could help in the selection of the eigenvectors to be kept in the basis for projection.

## 5. Conclusion

Whereas many authors have studied the phenomenon of squeal noise on simplified test rigs, here, a squeal noise experiment was performed on a real brake system. As the authors expected brake pads to play a key role in squeal noise phenomena, six three-axis accelerometers were fixed on the backplate of the piston pad. The accelerations measured showed that the squeal frequency was dependent on brake pressure. The spectrum of the pad's acceleration presented a fundamental frequency and two harmonics during squeal noise occurrence. These harmonics highlighted the non-linear nature of the squeal noise phenomenon. Although the squeal fundamental frequency was present almost throughout the experiment, squeal noise was only audible when the harmonics emerged.

Here, squeal could not be attributed to a stick-slip phenomenon. The authors presume that the non-linear contact stiffness between pad and disc is a possible explanation for the harmonic rates observed. This hypothesis could be verified in future work by measuring the relative displacements between the pad and the other parts.

The backplate motion of the piston pad was interpolated using the Finite Element method applied to acceleration measurements. A frequential component was present in the acceleration spectrum before squeal occurs. This frequential component became the fundamental frequency during the squeal event. The pad motion associated with this frequential component was the same bending motion before and during the squeal event. Moreover harmonic components occurred along with the occurrence of squeal noise. The pad motion associated with the second harmonic was composed of a torsion plus a bending motion mostly involving the leading edge of the pad.

A detailed FE model was used. It was recalibrated with the experimental frequency response of each individual part and of the whole brake system, and with the contact pressure law of the pad. This model was used to compute a real modal basis. The eigenvectors of this basis were compared to the motions observed using the Modal Assurance Criterion. Since no eigenvector clearly corresponded to the motion observed, this comparison showed that attention must be paid to the modeling of effective contact surfaces. Although better MAC values could have been expected, several eigenvectors had a significant MAC value. Hence the motions observed could be represented by a linear combination of several eigenvectors of the basis.

To improve our knowledge still further, it would be interesting to perform an experimental investigation on the influence of the coincidence between a harmonic and an unstable mode.

## Acknowledgments

This measurement campaign was performed thanks to the financial and technical help of the Robert BOSCH Foundation.

## Appendix A. Supplementary materials

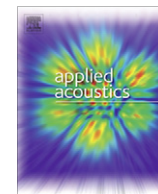
Supplementary data associated with this article can be found in the online version at <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.06.027>.

## References

- [1] O. Giannini, A. Akay, F. Massi, Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup, *J. Sound Vib.* 292 (2006) 1–20.
- [2] O. Giannini, A. Sestieri, Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake, *J. Sound Vib.* 296 (2006) 583–601.
- [3] O. Giannini, F. Massi, Characterization of the high-frequency squeal on a laboratory brake setup, *J. Sound Vib.* 310 (2008) 394–408.
- [4] A. Akay, O. Giannini, F. Massi, A. Sestieri, Disc brake squeal characterization through simplified test rigs, *Mech. Syst. Signal Process.* 23 (2009) 2590–2607.
- [5] T. Butlin, J. Woodhouse, A systematic experimental study of squeal initiation, *J. Sound Vib.* 330 (2011) 5077–5095.
- [6] P. Duffour, J. Woodhouse, Instability of systems with a frictional point contact—Part 3: experimental tests, *J. Sound Vib.* 304 (2007) 186–200.
- [7] A.R. AbuBakar, H. Ouyang, M.K.A. Hamid, A new prediction methodology for dynamic contact pressure distribution in a disc brake, *J. Teknol.* 45 (A) (2006) 1–11.
- [8] A.R. AbuBakar, H. Ouyang, A prediction methodology of disk brake squeal using complex eigenvalue analysis, *Int. J. Vehicle Des.* 46 (2008) 416–435.
- [9] A.R. AbuBakar, H. Ouyang, Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting disc brake squeal, *Int. J. Vehicle Noise Vib.* 2 (2006) 143–155.
- [10] C.L. Saw, C.G. Choong, A.R. Abu Bakar, M.R. Jamaluddin, W.M.M.W. Harujan, B.A. Ghani, Disc brake squeal suppression through chamfered and slotted pad, *Int. J. Vehicle Struct. Syst.* 3 (2011) 28–35.

- [11] W. Liu, G.M. Vyletel, J. Li, A rapid design tool and methodology for reducing high frequency brake squeal, in: *Proceedings of the 24th Annual Brake Colloquium & Exhibition*, 2006.
- [12] X. Lorang, F. Foymargiocchi, Q. Nguyen, P. Gautier, TGV disc brake squeal, *J. Sound Vib.* 293 (2006) 735–746.
- [13] J.D. Fieldhouse, T.P. Newcomb, Double pulsed holography used to investigate noisy brakes, *Opt. Lasers Eng.* 25 (1996) 455–494. *Optical Diagnostics in the Automotive Industry*.
- [14] G. Dhatt, G. Touzot, E. Lefrançois, *Méthode des éléments finis*, Lavoisier, 2005.
- [15] R.J. Allemang, The modal assurance criterion (MAC): twenty years of use and abuse, *Sound Vib.* August (2003) 14–21. University of Cincinnati.





# Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal: A numerical study

Hugo Festjens<sup>a,\*</sup>, Chevallier Gaël<sup>a</sup>, Renaud Franck<sup>a</sup>, Dion Jean-Luc<sup>a</sup>, Lemaire Remy<sup>b</sup>

<sup>a</sup> LISMM-SUPMECA, EA-2336, 3 Rue Fernand Hainaut, 93400 Saint-Ouen, France

<sup>b</sup> Robert Bosch (France) SAS, Chassis System Brake, 126 Rue de Stalingrad, 93700 Drancy, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 23 June 2011

Received in revised form 13 February 2012

Accepted 4 March 2012

Available online 21 June 2012

### Keywords:

Brake squeal

Viscoelastic damping

Complex eigenvalue analysis

Multilayered parts

## ABSTRACT

The purpose of this publication is to give an overview of the actual role of multi-layered viscoelastic parts, so called “shims”, to prevent squeal noises of automotive brake systems. Since shear stress is usually used to damp thin structures in their bending modes it is commonly believed to be the largest underwent by shims. To check this assumption and considering that stresses underwent by shims cannot be measured experimentally, the authors have computed them with the help of a detailed and realistic finite element model. Contrary to what shims manufacturers say, this study exhibits the fact that shims are almost uniquely solicited in their normal direction in brake systems. Secondly, the study focuses on the added damping and stiffening induced by the viscoelastic materials. In order to take into account these materials, a realistic frequency dependent viscoelastic behavior has been integrated in the simulations. Finally, the study shows certain eigenmodes for which the viscoelastic behavior of the shims reveals instabilities that would not exist without it. It is shown that this is due to coalescence phenomenon.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Frictional contact is known today as the source of squeal noise in braking systems. The general scenario for squeal occurrence is described as a merging of two real modes in an unstable complex one as the friction coefficient increases. This phenomena is called modal coalescence, see the review of Kinkaid [1] for example. Many authors have conducted experimental works on laboratory or industrial brake setups. For example, Giannini and Massi [2] show that squeal always involves a mode of the pads coupled with a mode of the disc. Nowadays, a great number of lumped [3] or detailed [4] brake models have been built to predict frequency coalescence. Even if this phenomena is likely to be known, numerical modal analyses remain insufficiently predictive to improve the design of brake systems, see [5]. Indeed, important phenomena such as gyroscopic effects, circulatory forces and damping behaviors are rarely taken into account in FEM models contrary to lumped models, see Hervé et al. [6]. All those phenomena are able to affect modal eigenvalues and, as a results stabilize or destabilize the system.

Among the methods that have been used to control squeal noise, increasing the system damping has been shown to be very effective, see [7]. A common way to do that is the application of shims on the pad backplates, see [8]. Kappagantu et al. [9] show

their great efficiency inside a vehicle subjected to road tests. Several brake systems components have a high damping behavior such as brake shims. Because of their glue and rubber layers those components have a viscoelastic behavior. Chen et al. [4] suggest that the use of damping material glued on the backplate of the pads may reduce squeal propensity. However modal stresses underwent by shims are not fully known. In his review, Flint [10] shows qualitative agreement between shims shear-damping measurement and their efficiency in disc brake systems. Fieldhouse [11] shows the mode shapes of pads and disc during squeal occurrence using holography. Renaud et al. [12] have built the pads operational mode shapes using accelerometry. In those papers, it appears that pads undergo torsional and bending waves. Otherwise, shear stress is commonly believed to be the largest underwent by shims since it allows to damp thin structures in their bending modes, see [13]. As a result, shim manufacturers suggest the use of multi-layered viscoelastic plates in the case of brake systems. The selection of shims is an open topic, many authors have proposed studies on the subject. In a recent paper, Trichês [14] deals with a parametric analysis including a study about brake noise insulators. In their paper [15] Hoffrichter et al. define common specifications that aims to compare the physical properties of shims. One of the most important properties of shims seems to be the control the de-coupling effect in the direction of the normal forces [8]. Kappagantu et al. [16] investigate the use of geometry changes of the insulators in attenuating brake squeal. Liu et al. [17] present a simple finite element model for designing pad shape

\* Corresponding author.

E-mail address: [hugo.festjens@gmail.com](mailto:hugo.festjens@gmail.com) (H. Festjens).



to reduce high frequency brake squeal. Despite all this work, the role of shims remains unclear. In order to check the true role of shims and considering that the modal stresses in the shims cannot be measured experimentally, the first authors' purpose is to compute them with the help of a detailed finite element model.

Since it is an energy sink, damping should have a stabilizing effect on unstable brake eigenmodes. However, the presence of a non proportional damping source may reveal certain instabilities that would not exist without it. Several studies such as that of Kirillov [18], that of Fritz et al. [19], that of Hervé et al. [6] or that of Cantone and Massi [20] have proven that paradox. It appears therefore essential to take into account the viscoelastic behavior of the shims. In order to achieve this goal, the authors have developed tools that take into account viscoelasticity in their Complex Eigenvalue Analysis (CEA) simulations, see [21,22]. The review of Kinkaid [1] and the paper of Flint show [10] that shims are globally beneficial to the stability of disc brake systems. However, in the second part of this paper, it is shown that the influence of viscoelastic shims on the stability of a given eigenmode cannot be, a priori, determined because of the viscoelastic stiffening and the coalescence phenomena.

The calculation process is presented in the first section of the paper. Theoretical aspects of the previous paper [22] are used in this work. As it is not commonplace to perform such computation, [23], the presented method has been suited for a realistic model that includes a large number of DOF. Then this realistic finite element model, provided by the chassis system brake department of Robert Bosch (France) is presented. Finally post processing tools are used to plot the solicitations sustained by the shims in normal and shear directions. The complex eigenvalue analysis leads to plot root locus according to viscoelastic structural damping. Consequences on brake squeal propensity are presented and discussed.

## 2. Numerical model

### 2.1. Calculation process

This section describes the calculus process of the whole brake assembly. Finite elements analyses are carried out with ABAQUS® and MATLAB®. The whole model is meshed with parabolic tetrahedrons.

Except for pads and insulators, all the parts of the system are made of steel or cast iron. Those parts are assumed to behave linearly, whereas joints behave non-linearly. Isotropic materials properties are updated by comparing the numerical eigenvalue analyses under free-free conditions with the experimental dynamic response. Mechanical interactions between the different parts are modeled according to the type of contact (see Fig. 2). Bolted joints are provided by defining linear stiffnesses at the interfaces. Their values, which are around 130,000 N/mm, are updated with the experimental dynamic responses. A non-linear normal contact law is defined between all the clamping parts and friction is also taken into account between the pads and the disc. This leads to the following non-linear problem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_e \quad (1)$$

$\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}$  are the mass and stiffness matrices respectively.  $\mathbf{u}$  is the nodal displacements,  $\mathbf{f}_e$  the external forces and  $\mathbf{f}_{nl}$  represents the nodal contact forces.

Contact forces are governed by:

- An exponential normal contact law. In this contact pressure–overclosure relationship, the surfaces begin to transmit contact pressure once the clearance between them, measured in the contact (normal) direction, reduces to a constant  $c_0$ . The contact pressure transmitted between the surfaces then increases exponentially as the clearance continues to decrease.
- Friction is modeled using a Coulomb law with a constant friction coefficient  $\mu = 0.3$ . Friction is only considered between the disc and the pads. Renaud et al. [12] have experimentally shown that the motion of the pads is far from being enough to induce stick slip phenomena even at a low rotational speed (100 rpm). As a result, pads and disc are assumed to be in a permanent slip mode.

Friction law, may also depend on the sliding velocity  $\dot{\mathbf{u}}$ , the piston pressure  $P$  or the temperature of the parts. However, the range of frequency of the brake eigenmodes is much higher than the frequency of variation of those parameters. As a result those parameters are assumed to be constant. The dynamic problem is solved by linearization around the static position  $\mathbf{u}_0$ , which depends on the pressure  $P$ . The static problem is firstly solved:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{f}_e \quad (2)$$

This is done thanks to the ABAQUS® standard solver. Secondly, the result of this preload calculation, is linearized at the working point for eigenmodes extractions by writing  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ . Where  $\mathbf{v}$  is a small variation of the position. The dynamical problem becomes:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{NL}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{u}_0} \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

The last term is the sum of the symmetrical matrix  $\mathbf{K}_c$  that contains the normal stiffness distribution and the unsymmetrical friction matrix  $\mathbf{K}_t$  which depends on the friction coefficient  $\mu$ .

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}_{NL}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{u}_0} = \mathbf{K}_n + \mathbf{K}_t(\mu)$$

See [24] for more details.

Thirdly, a preliminary frictionless (i.e. without  $\mathbf{K}_t$ ) real eigenvalues extraction is conducted.

$$(\mathbf{M}\mathbf{s}^2 + \mathbf{K} + \mathbf{K}_n)[\Phi] = 0 \quad (4)$$

We get a basis of projection  $[\Phi]$  that is truncated and used to project the real displacement fields as it is done for most linear problems.

All the parts are assumed to be purely elastic as their structural damping can be neglected compared with the structural damping

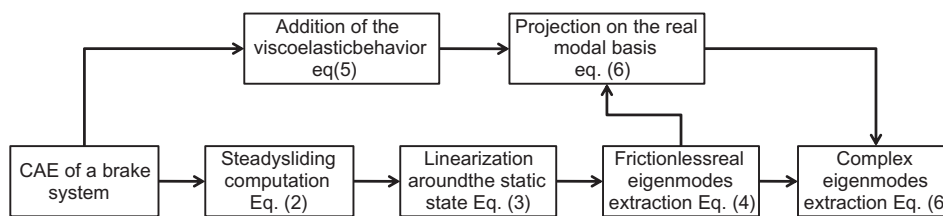


Fig. 1. Calculation process.

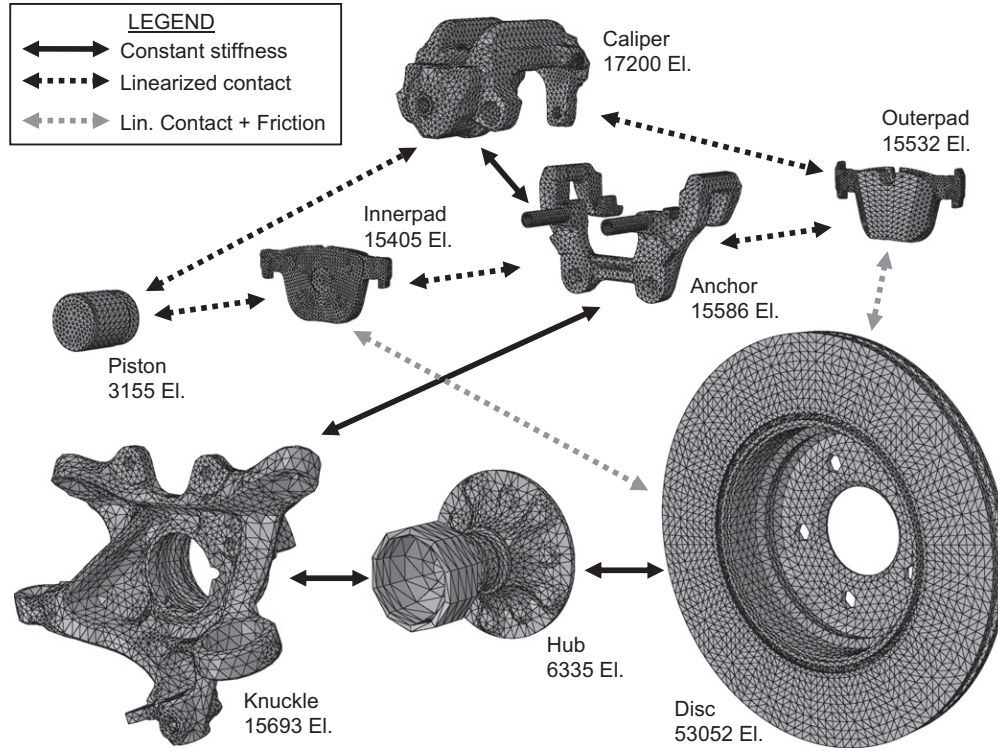


Fig. 2. Whole system finite element model.

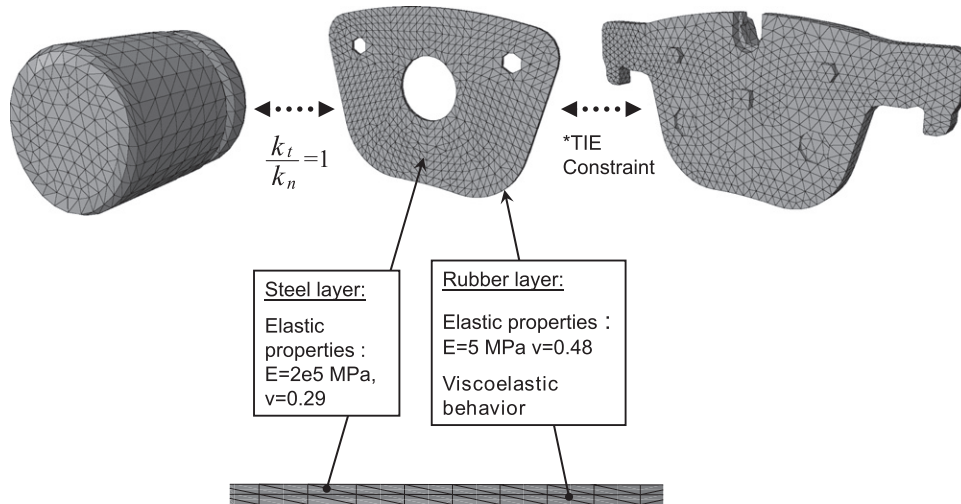


Fig. 3. Innerpad shim constraints.

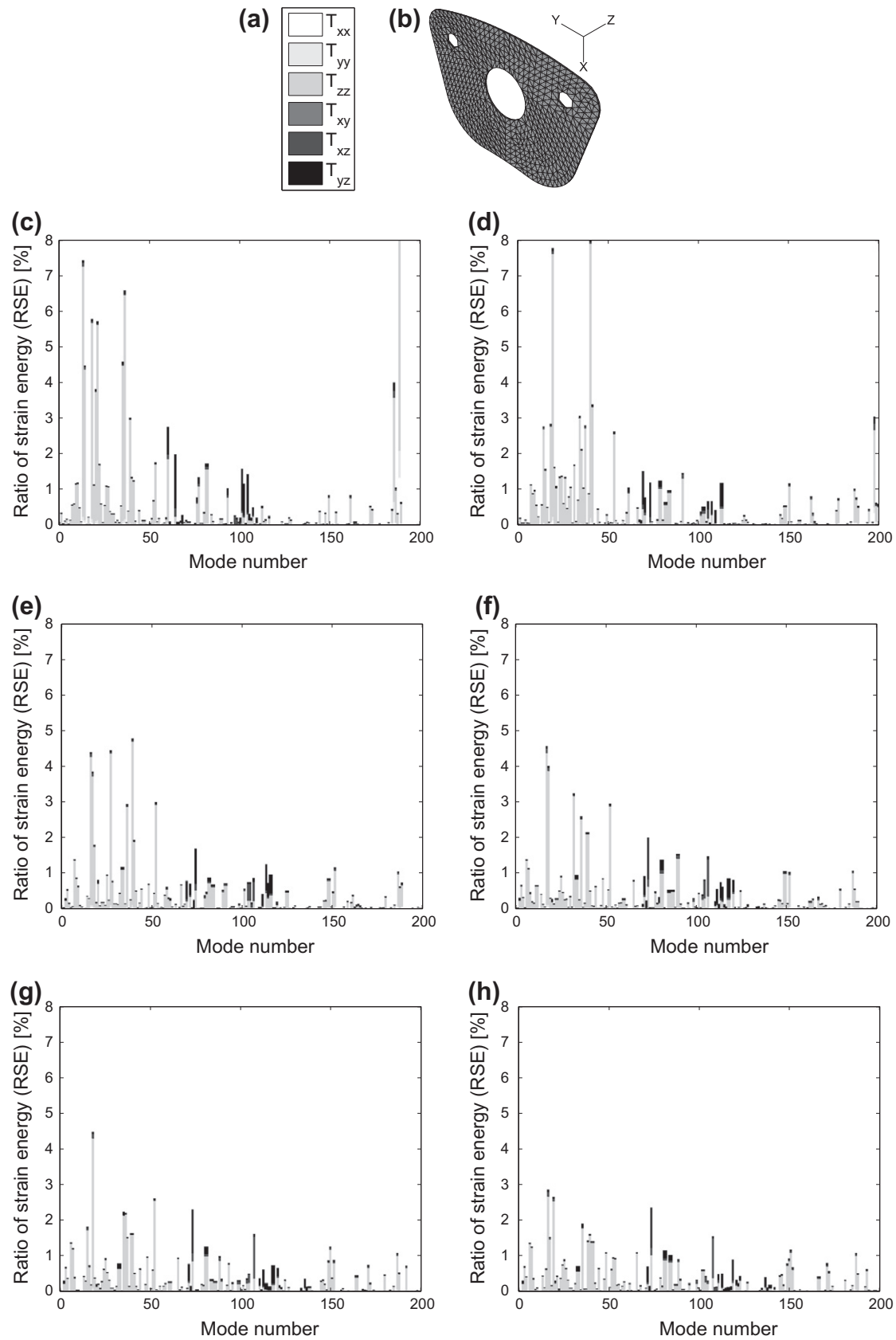
of viscoelastic parts. Generalized Maxwell Model (GMM) is chosen to simulate structural frequency dependent damping of the shims. In such a definition, complex stiffness, is written as a sum of rational fractions in it's rheological form. One prefers to work with nondimensionalized coefficients by writing complex stiffness  $\mathbf{H}$  as follows:

$$\mathbf{H}(s) = \left( 1 + \sum_{i=0}^N \frac{\alpha_i \cdot \tau_i \cdot s}{1 + \tau_i \cdot s} \right) \mathbf{H}_0 \quad (5)$$

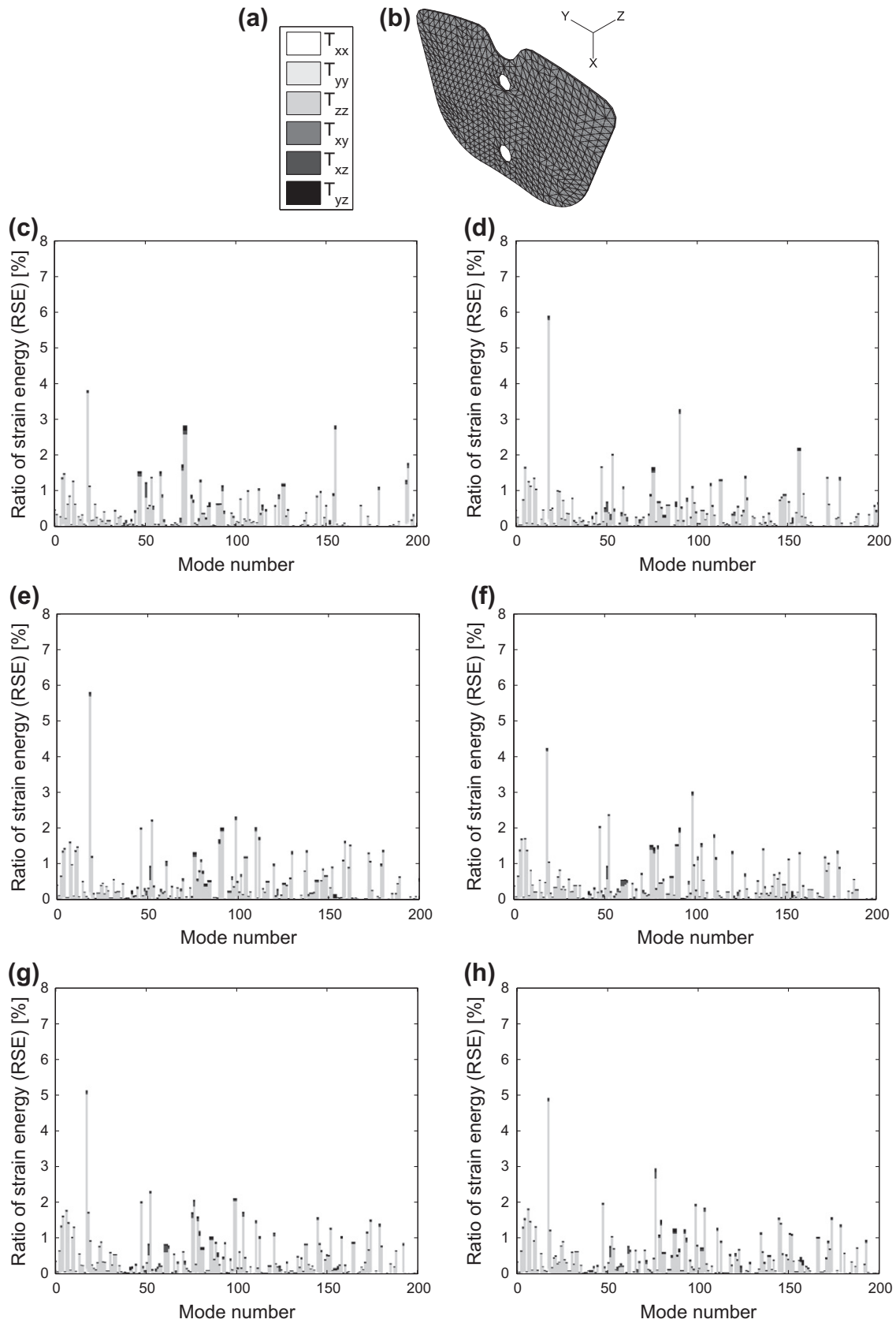
where  $\tau_i$  are relaxation times and  $\alpha_i$  viscoelastic constants.  $N$  is the number of Maxwell cells. The model has five Maxwell cells

according to Renaud's recommendations [25] with regard to the frequency range studied (between 200 Hz and 12,700 Hz). In our model  $\mathbf{H}_0$  is the static stiffness of a viscoelastic element. Renaud et al. [25], has developed the tools that allow to identify the GMM viscoelastic parameters  $\alpha_i$  and  $\tau_i$  from an experimental nomogram. As Thouviot et al. [21] has shown, the non-uniqueness in the identification of those parameters allows to find commons  $\tau_i$  for different materials in order to include a new viscoelastic material without increasing the size of the model. Otherwise viscoelastic data applied to the shims have been taken from the test campaign for Robert Bosch (France) SAS. It should be noticed that the viscoelastic properties of the shims presented in this paper do not

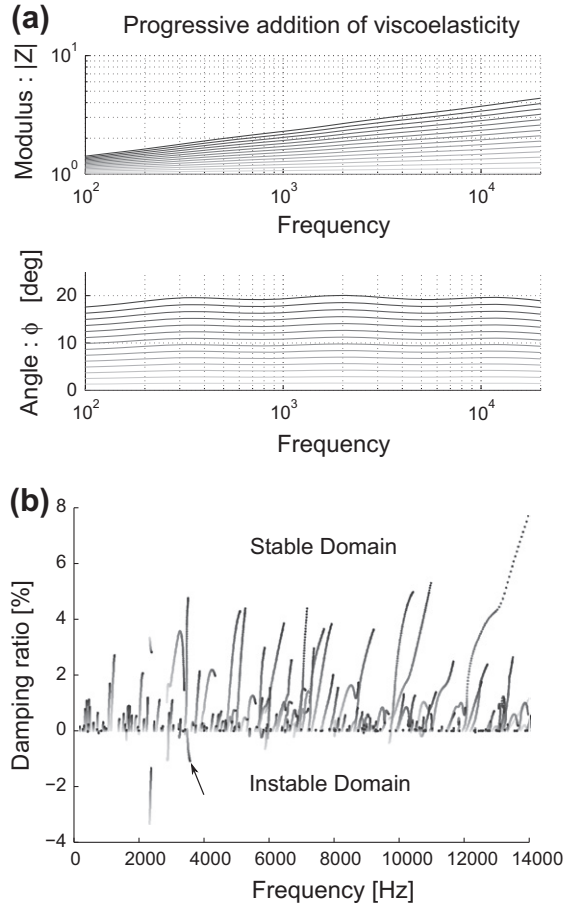




**Fig. 4.** Solicitation of the rubber part of the innerpad shim for various pressure levels: (a) grey levels represent the directions of stresses in the rubber part; (b) orientation of the innerpad shim; (c)  $P = 5$  bars; (d)  $P = 10$  bars; (e)  $P = 15$  bars; (f)  $P = 20$  bars; (g)  $P = 25$  bars; and (h)  $P = 30$  bars. The post-processing shows that the shim is mainly solicited in its normal direction  $T_{zz}$ .



**Fig. 5.** Solicitation of the rubber part of the outerpad shim for various pressure levels: (a) grey levels represent the directions of stresses in the rubber part; (b) orientation of the outerpads shim; (c)  $P = 5$  bars; (d)  $P = 10$  bars; (e)  $P = 15$  bars; (f)  $P = 20$  bars; (g)  $P = 25$  bars; and (h)  $P = 30$  bars. The post-processing shows that the shim is mainly solicited in its normal direction  $T_{zz}$ .



**Fig. 6.** Influence of viscoelasticity on brake stability. Progressive addition of viscoelasticity from no stiffening (bright gray) up to the viscoelastic properties of a real shim (black): (a) representation of viscoelasticity in bode diagram and (b) evolution of the brake system's eigenvalues of the brake with the increase of viscoelasticity from bright gray to black. Root locus obtained by solving Eq. (5).

depend on the pressure contrary to some insulators that may behave non-linearly. The real eigenmodes basis is enhanced with the method developed by Balmès [26].

One can finally write the complex eigenvectors  $\Pi_i$  as the linear combinations of the real eigenvectors  $\Pi_i = [\Phi]\Psi_i$ , where vectors  $\Psi_i$  are the solutions of the following system:

$$[\Phi]^t \left( M s^2 + K + K_n + K_t + \sum_{m=1}^{Nbm} K_{visco}^m \sum_{c=1}^{Nbc} \frac{\alpha_c^m \tau_c^m s}{1 + \tau_c^m s} \right) [\Phi] \Psi_i = 0 \quad (6)$$

$K_{visco}^m$  are the stiffness matrices of the viscoelastic elements.  $Nbc$  is the number of Maxwell cells and  $Nbm$  is the number of different viscoelastic materials. The complex eigenvalue analysis is finally performed, using an original state form solving [22], in order to identify unstable modes that may lead to a potential squeal state. In the frequency range (between 200 Hz and 12,700 Hz) studied we finally obtain 200 complex eigenvectors. An overview of the calculation process is provided in Fig. 1.

## 2.2. Finite element model

The model roughly contains 1,500,000 degrees of freedom (including structural d.o.f and artificially added d.o.f for constraints) with 145,000 quadratic tetrahedron elements. Both shims are fitted on their pad with a ABAQUS® mesh \* TIE constraint, see [27] for details. Those components are modeled with two layers of quadratic elements see Fig. 3: A steel layer modeled with purely

elastic properties and a rubber layer that takes into account the viscoelastic behavior. In order to allow transversal vibrations to be transmitted, normal and tangential stiffnesses are added between the piston and the innerpad and between the caliper and the outerpad. The tangential stiffness  $k_t$  is chosen equal to the normal stiffness  $k_n$ <sup>1</sup>.

## 3. Post-processing and results

In order to understand the role of the shims in the decrease of unstable eigenmodes, let's introduce the following quantities:

- Ratio of strain energy  $RSE(m)$  sustained by the rubber layer of each shim over total strain energy for the mode  $m$ :

$$RSE(m) = \frac{\sum_{e \in \text{Rubber}} E_m^e}{\frac{1}{2} |s_m^2|}$$

where  $E_m^e$  is the energy of the finite element  $e$  at the mode  $m$ .  $s_m$  is the complex eigenvalue of the mode  $m$ . As eigenvectors are normalized to the mass matrix (i.e.  $[\Pi]^t M [\Pi] = I$ ), we have  $\Pi_m K \Pi_m = s_m^2$  and  $\frac{1}{2} |s_m^2|$  is equal to the total modal strain energy of the mode. This formulation does not take into account the strain energy due to the preload.

- Ratio of strain energy sustained by the rubber layer of each shim that corresponds to the direction  $ij$  for the mode  $m$ :

$$\forall (i,j) \in [1;6]^2, E_{ij}(m) = \left| \sum_{e \in \text{Rubber}} \left( \frac{1}{2} \int_{V_e} T_{ij} S_{ij} dV \right) \right|$$

where  $T_{ij}$  and  $S_{ij}$  are respectively Cauchy stresses and linear strains in the direction  $ij$  for the mode  $m$ .  $V_e$  is the volume of the element  $e$ .

Actually the strain energies  $E_{ij}$  break down the shims elastic strain energy into six components that correspond to the three tension–compression stresses and the three shear directions. So, for the mode  $m$  we have:

$$E_m = E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{12} + E_{13} + E_{23}$$

### 3.1. RSE sustained by the shims rubber layer of the 200 first complex eigenmodes for several piston pressures

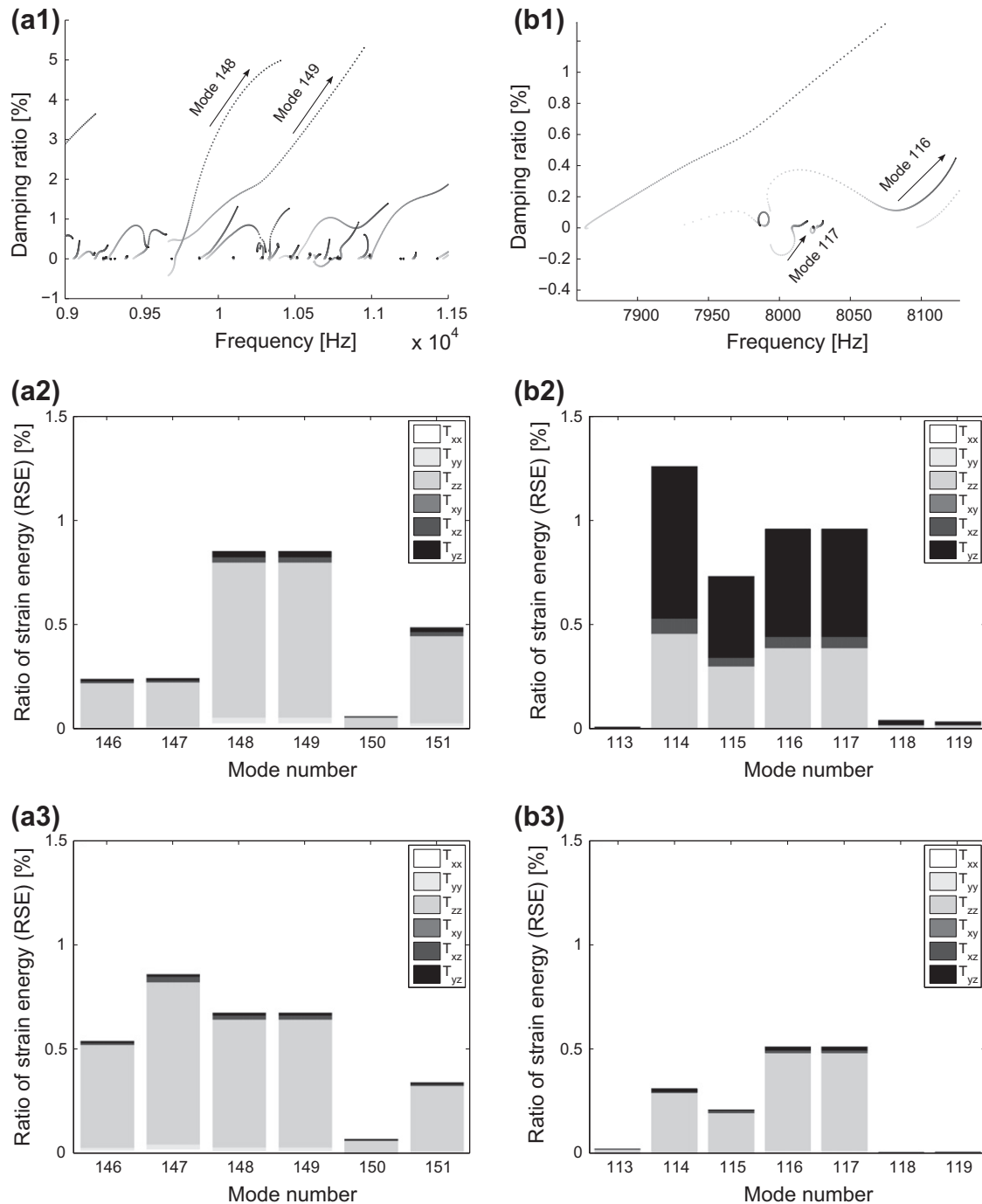
We proceed a complex eigenmodes extraction of the brake system without viscoelasticity for six piston pressures from 5 up to 30 bars. The following figures show the ratio RSE in percentage and the  $E_{ij}$ 's components on the innerpad and on the outerpad for the 200 first complex eigenmodes (see Figs. 4 and 5).

We can see that shims are almost only solicited in tension–compression in the direction of the movement of the piston (direction of  $T_{zz}$ ). This is even more obvious for the case of the outerpad, see Fig. 5. One can also see that this high solicitation in tension–compression is more or less independent of the piston pressure. The shims as they are sold today by manufacturers are designed for shear stress but, based on the results, one could design a new shape in order to damp specifically the compression eigenmodes. Another aspect that should be considered is the influence of shims viscoelastic behavior on the stability of the brake system.

### 3.2. Viscoelastic weight

Using the method of Renaud et al. [25] we vary viscoelastic properties, at a given pressure, applied to the shims. Fig. 6 shows the impact on eigenvalues of a viscoelastic stiffening from no

<sup>1</sup>  $k_n$  is calculated at the non-linear static step.



**Fig. 7.** Comparison between RSE and coalescence of two unstable eigenmodes: Example (a): Coupled eigenmodes no. 148–149,  $f = 9673$  Hz; (a1) Evolution of coupled eigenvalues with the increase of viscoelasticity; (a2) Solicitation of the rubber part of the innerpad shim for  $P = 15$  bars; and (a3) Solicitation of the rubber part of the outerpad shim for  $P = 15$  bars. Example (b): Coupled eigenmodes no. 116–117,  $f = 7994$  Hz; (b1) Evolution of two unstable eigenvalues with the increase of viscoelasticity; (b2) Solicitation of the rubber part of the innerpad shim for  $P = 15$  bars; and (b3) Solicitation of the rubber part of the outerpad shim for  $P = 15$  bars. The viscoelastic influence on the stability of a given eigenmode cannot be, a priori, determined from the corresponding RSE.

stiffening (bright gray) up to the viscoelastic properties of a real shim (black).

As expected, shims viscoelastic rubbers are found to be globally beneficial to the stability of the braking system due to the decoupling of brake eigenmodes and the addition of modal damping. However, their contribution to the stability is limited. First and obviously, many eigenmodes are not affected at all by the increase of viscoelasticity since strain energy is not lumped on

the shims. Focusing on the eigenmodes, where the strain energy is actually located on viscoelastic materials, one would expect an increase of their damping ratio and a gradual increase of their eigenvalue (directly due to the stiffening of the viscoelastic material). However, the viscoelastic influence on the stability of a given eigenmode cannot be, a priori, determined from the corresponding RSE. In order to illustrate it, let's consider two examples in Fig. 7.

- **Example (a) – Eigenmodes no. 148–149,  $f = 9673$  Hz,  $P = 15$  bars:** We first focus on an unstable eigenmode that is heavily impacted by the viscoelasticity. As one might expect this case shows an important solicitation of the rubber layer in the direction of shims traction-compression.
- **Example (b) – Eigenmodes no. 116–117,  $f = 7994$  Hz,  $P = 15$  bars:** For the second case we focus on an unstable eigenmode for which the rubber layer of the innerpad shim is heavily sheared in term of strain energy. In this case the shear of the innerpad shim is very few stabilizing.

In both cases shims are strongly stressed; however only the eigenmodes of the example (a) are clearly stabilized. Besides, as one can also see Fig. 6, the signposted eigenmode shows the case of the paradox already mentioned [18,19]: The addition of a lumped source of damping may also reveal certain instabilities that would not exist without it. We can deduce the following conclusion: The addition of a viscoelastic material in a very localized area causes a stabilization of the eigenmodes that solicit this area but also increases their natural frequency. This increase can cause both a decoupling or a coupling of eigenmodes. That's why the influence of the shims on the stability of a given eigenmode cannot be, a priori, determined from the corresponding RSE. Besides, this study does not take into account the gyroscopic forces that can amplify this paradoxical phenomenon, as Hervé et al. [6] have shown.

This study is based on the complex modal analysis that is a quick way to detect unstable eigenmodes. It should be noticed that under linear assumption, the amplitude increase of a destabilized eigenmode is exponential and quickly involves non-linear phenomena. This type of study is limited to small vibrations and cannot describes the evolution of a destabilized eigenmode. The non-linear calculation of the transient evolution to the limit cycle of an unstable mode have been especially investigated by Vermot des Roches et al. [28] on a brake model that includes contact non-linearities. A non-linear lumped model have also been proposed by Hervé et al. [29]. This recent study gives a dynamic extension of the destabilization paradox.

#### 4. Conclusion

Brake noise detection tools are based on complex eigenvalue analysis. Nowadays, this tool is commonly used in NVH departments to design brake systems. As it has to be improved in order to consider the behavior of several components such as shims, authors have developed tools that allow to take into account viscoelasticity in their simulations. Technological solutions based on the use of multi-layered viscoelastic components have been empirically shown as efficient by manufacturers in order to reduce squeal noises. This study shows that it is due to the addition of viscoelastic damping and the decoupling of brake eigenmodes. However, although shims are designed to work in shear, this paper shows that they are mainly solicited in compression. This conclusion may lead to design this component differently in order to maximize the damping. Furthermore, despite the fact that shims are globally beneficial to the stability of disc brake systems, it is shown that the influence of multi-layered viscoelastic shims on the stability of a given eigenmode cannot be, a priori, determined because of the viscoelastic stiffening and the coalescence phenomena. It is shown that this situation can, rarely, lead to the paradoxical

situation, where the addition of a shim reveals instabilities that would not exist without it.

#### References

- [1] Kinkaid N. Automotive disc brake squeal. *J Sound Vib* 2003;267:105–66.
- [2] Giannini O, Massi F. Characterization of the high-frequency squeal on a laboratory brake setup. *J Sound Vib* 2008;310:394–408.
- [3] Giannini O, Sestieri A. Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake. *J Sound Vib* 2006;296:583–601.
- [4] Chen G, Liu Q, Jin X, Zhou Z. Analysis of disc brake squeal using the complex eigenvalue method. *Appl Acoust* 2007;68:603–15.
- [5] Hou J, Xun Guo X, Feng Tan G. Complex mode analysis on disc brake squeal and design improvement. In: Noise and vibration conference and exhibition. St. Charles (IL, USA): Society of Automotive Engineering; 2009.
- [6] Hervé B, Mahé JSH, Jézéquel L. Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects. *Eur J Mech – A/Solid* 2008;27:141–60.
- [7] Jun H, Xue-Xun G, Gang-Feng T. Complex mode analysis on disc brake squeal and design improvement. Technical report 2009-01-2101, Warrendale (PA): SAE International; 2009.
- [8] Flint J, Chinnamy A, Stikvoort A. New method to identify dynamic normal stiffness and damping of shims for CAE modeling. Technical report 2010-01-1711, Warrendale (PA): SAE International; 2010.
- [9] Kappagant RV. Vibro-impact rotor dampers for brake squeal attenuation – towards an insulator free design to quell squeal. Technical report 2008-01-2549, Warrendale (PA): SAE International; 2008.
- [10] Flint J. A review of theories on constrained layer damping and some verification measurements on shim material. In: 21st Annual brake colloquium and exhibition. Hollywood: Society of Automotive Engineering; 2003.
- [11] Fieldhouse J. Double pulsed holography used to investigate noisy brakes. *Opt Lasers Eng* 1996;25:455–94.
- [12] Renaud F, Dion J, Chevallier G. Brake pad motion during squeal generation. In: Symposium vibrations, shocks and noise 2010, Lyon (France); 2010.
- [13] Oberst H. Über die dämpfung der biegeschwingungen dünner bleche durch fest haftende belage. *Acustica* 1952;2(4):181–94.
- [14] Trichês Júnior M, Gerges SN, Jordan R. Analysis of brake squeal noise using the finite element method: a parametric study. *Appl Acoust* 2008;69:147–62.
- [15] Hoffrichter W, Schmitt O, Fecske L. Development of shim specifications. Technical report 2008-01-2545, Warrendale (PA): SAE International; 2008.
- [16] Kappagant RV, Denys E. Geometric tuning of insulators for brake squeal attenuation. Technical report 2008-01-2546, SAE International, Warrendale, PA; 2008.
- [17] Liu W, Vyletel GM, Li J. A rapid design tool and methodology for reducing high frequency brake squeal. Technical Report 2006-01-3205, Warrendale (PA): SAE International; 2006.
- [18] Kirillov O. A theory of the destabilization paradox in non-conservative systems. *Acta Mech* 2005;174:145–66.
- [19] Fritz G, Sinou J, Duffal J, Jezequel L. Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *J Sound Vib* 2007;307:591–609.
- [20] Cantone F, Massi F. A numerical investigation into the squeal instability: effect of damping. *Mech Syst Signal Process* 2011;25:1727–37.
- [21] Thouviot S, Chevallier G, Renaud F, Dion J, Lemaire R. Dynamic computation of braking systems including viscoelastic behaviours. *Mec Ind* 2009;10:385–96.
- [22] Chevallier G, Renaud F, Dion J-L, Lemaire R. Viscoelastic damping effect on brake squeal noise. San Diego: IDETC, ASME; 2009.
- [23] Mahajan SK, Denys E, Bae J, Shi TS, Im KH. Pad insulator modeling for brake squeal analysis. Technical report 2005-01-2314, Warrendale (PA): SAE International; 2005.
- [24] Chevallier G, Nizerhy DL, Valloire FR, Macewko F. Chattering instabilities: study of a clutch system. In: Structural dynamics (EURODYN). Paris (France): Millpress; 2005.
- [25] Renaud F, Dion J, Chevallier G, Tawfik I, Lemaire R. A new identification method of viscoelastic behavior: application to the generalized maxwell model. *Mech Syst Signal Process* 2011;25:991–1010.
- [26] Balmès E. De l'utilisation de la norme en énergie pour la création de modèles réduits en dynamique des structures. *CR Acad Sci* 1996;323:255–60.
- [27] Abaqus 6.10 Analysis User's Manual. Section 31 "Constraints", subsection 3.1 "Mesh tie constraint".
- [28] des Roches GV, Balmès E, Pasquet T, Lemaire R. Time simulation of squeal phenomena in realistic brake models. In: International conference on noise and vibration engineering, ISMA, Leuven, Belgium, 2008.
- [29] Hervé B, Sinou J-J, Mahé H, Jézéquel L. Extension of the destabilization paradox to limit cycle amplitudes for a nonlinear self-excited system subject to gyroscopic and circulatory actions. *J Sound Vib* 2009;323:944–73.

## Prise en compte des comportements viscoélastiques dans la simulation dynamique des systèmes de freinage

SYLVAIN THOUVIOT<sup>1,a</sup>, GAËL CHEVALLIER<sup>1</sup>, FRANCK RENAUD<sup>1</sup>, JEAN-LUC DION<sup>1</sup>  
ET RÉMI LEMAIRE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LISMMA – Institut Supérieur de Mécanique de Paris, 3 rue Fernand Hainaut, 93400 Saint-Ouen, France

<sup>2</sup> BOSCH Systèmes de freinage, Dépt. NVH, 93700 Drancy, France

Reçu le 23 juin 2009, accepté le 23 juin 2009

**Résumé** – Dans le cadre de la simulation des systèmes de freinage, la mise en évidence de phénomènes tels que le crissement fait appel à des méthodes spécifiques. On s'intéressera ici à l'analyse de stabilité par le calcul des pulsations et modes propres. L'utilisation de dispositifs amortissants « shims » pour la réduction du bruit de crissement implique que les simulations prennent en compte les effets amortissants des matériaux. On utilise pour cela des modèles de matériaux viscoélastiques et en particulier le modèle de Maxwell généralisé. Les travaux ont consisté à choisir et valider des outils (modèles viscoélastiques, formulations éléments finis, ...) et à mettre en place une méthode de simulation. Ils se sont divisés en plusieurs étapes. Dans un premier temps, il a fallu sélectionner, parmi plusieurs modèles mathématiques permettant de décrire la viscoélasticité, le plus adapté à la modélisation de l'amortissement dans les systèmes de freinage. On a étudié les modèles à module complexe, de Kelvin-Voigt et de Maxwell généralisé. Dans un second temps, il a fallu trouver une formulation du problème éléments finis adaptée à l'analyse modale. On a alors utilisé une formulation en modèle d'état. Une hypothèse importante concernant l'égalité des pôles du modèle de Maxwell a permis de limiter la taille du modèle tout en simplifiant sa formulation. Enfin, les méthodes mises en place ont été appliquées à une plaquette de frein dans un premier temps et à un frein complet ensuite. Des analyses paramétriques sur le nombre de modes de projection et l'ordre des modèles de Maxwell ont été menées sur ces deux cas test. Dans le cas de la plaquette de frein, on a effectué une analyse modale complexe en prenant en compte la viscoélasticité du matériau de friction. L'objectif était d'obtenir un recalage de la plaquette, en terme de fréquences et d'amortissements, par rapport à une mesure FRF. Dans le cas du modèle de frein complet, on a effectué une analyse modale complexe en prenant en compte la viscoélasticité des matériaux de friction et du « shim ». Le modèle de frein a également servi de support à la mise en évidence du lien entre la répartition de l'énergie de déformation dans le frein et l'amortissement observé par analyse modale complexe. Pour conclure, on a développé une méthode de simulation utilisant Abaqus<sup>®</sup>, Matlab<sup>®</sup> pour la phase d'analyse modale complexe avec effets viscoélastiques et Python pour l'interfaçage entre Abaqus<sup>®</sup> et Matlab<sup>®</sup>. Cette méthode permet de traiter des problèmes d'analyse de stabilité avec la prise en compte de plusieurs matériaux viscoélastiques, sur des modèles de grande dimension, sans surcoût en terme de temps de calcul.

**Mots clés** : Viscoélasticité / analyse modale complexe / Maxwell généralisé / amortissement / frein / énergie de déformation

**Abstract** – **Dynamic computation of braking systems including viscoelastic behaviours.** In the context of brake system simulation, the highlight of phenomenon like squeal needs specific methods. We will focus on stability analysis by complex modal analysis. The use of damping system called shims for squeal noise reduction implies that simulations take into account the damping of materials. To do this, we use parametric viscoelastic models and particularly the generalised Maxwell model. Work consisted in tools choice and validation (viscoelastic models, finite elements formulations, ...) and in simulation method implementation. It was divided in several steps. In a first step, we have selected, among several mathematical models able to describe viscoelasticity, the best for damping modelisation in brake systems. We studied the complex modulus model, the Kelvin-Voigt model and the generalised

<sup>a</sup> Auteur pour correspondance : [sylvain.thouviot@supmeca.fr](mailto:sylvain.thouviot@supmeca.fr)



Maxwell model. In a second step, we sought a formulation of the finite element problem adapted to the modal analysis. We then used a state space model formulation. A capital hypothesis on the equality of the pole of the generalised Maxwell model permits to reduce the size of the model and in the same time to simplify its formulation. Finally, the developed methods have been applied to simulate a pad and a full brake system. The influence of the number of modes used in model reduction and the order of the Maxwell model has been quantified in parametric studies. In the pad case, we performed a complex modal analysis with friction material considered as viscoelastic. The objective was to update the pad frequencies and damping according to FRF measures. In the brake case, we performed a complex modal analysis with the two friction materials and one shim considered as viscoelastic. This model has also been used to exhibit the link between the strain energy distribution in the brake and the damping level obtained by complex modal analysis. To conclude, we developed a simulation method using Abaqus<sup>®</sup> and Matlab<sup>®</sup> for the complex modal analysis with viscoelasticity effects and Python to make data exchange between Abaqus<sup>®</sup> and Matlab<sup>®</sup> possible. This method permits to perform stability analysis with several viscoelastic materials, on large models, without degradation of computation time.

**Key words:** Viscoelasticity / complex modal analysis / generalized Maxwell / damping / brake / strain energy

## 1 Introduction

Le contrôle et la prédiction des vibrations et des niveaux de bruit des systèmes mécaniques sont devenus des critères importants dans la conception de nouveaux produits. Dans le cas d'un système de freinage, la source principale d'excitation est le frottement des plaquettes sur le disque à l'origine du bruit de crissement. Les clients étant sensibles à ces bruits indésirables, l'étude du crissement est devenue un axe de recherche prioritaire pour les industriels. Les nombreux travaux publiés sur le sujet montrent que la cause du crissement est souvent un couplage de modes propres dû aux forces de frottement [1,2]. La prédiction du comportement vibratoire du frein est réalisée par une méthode classique d'analyse modale complexe sur un modèle discrétisé par éléments finis. Certains matériaux comme les garnitures ou les « shims » utilisés pour l'atténuation des vibrations présentent un comportement viscoélastique. L'impact de l'amortissement sur la stabilité a été mis en évidence par des modèles d'amortissements modaux notamment [3]. Toutefois, l'aspect dépendance à la fréquence caractéristique des comportements viscoélastiques est difficile à prendre en compte dans les codes éléments finis du commerce adaptés aux modèles de tailles industrielles. L'objectif est de développer une méthode d'analyse de stabilité par analyse modale complexe sur des modèles éléments finis de grande taille et viscoélastiques. L'étude est divisée en trois parties : la première traite de la modélisation des comportements viscoélastiques, la seconde traite de la mise en oeuvre de ces modèles dans les analyses modales, la troisième illustre l'application de la méthode sur un cas simple (recalage d'une plaquette) et sur un cas à grand nombre de degrés de liberté (analyse de stabilité sur un frein). Une analyse paramétrique est également menée pour ces deux exemples d'application.

## 2 Modélisation des dissipations

Classiquement, la prise en compte des dissipations dans un modèle éléments finis se traduit par une matrice

de raideur complexe et éventuellement dépendante de la fréquence. De manière générale, on s'intéresse au problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$s_j^2 \underline{\underline{M}} \phi_j + \underline{\underline{K}}^*(s_j) \phi_j = 0 \quad (1)$$

Il existe de nombreuses façons de prendre en compte l'amortissement dans un problème de calcul de structures. Dans une approche temporelle, on peut modéliser les fonctions de fluage et de relaxation des matériaux. Dans les approches fréquentielles, le modèle à module complexe, le modèle de Kelvin-Voigt, le modèle de Zener, le modèle de Maxwell généralisé ou encore les modèles à dérivées fractionnaires sont souvent utilisés. Nous nous sommes intéressés à certains de ces modèles dans le but de modéliser le comportement viscoélastique des structures.

La structure pouvant être totalement ou partiellement viscoélastique, on peut toujours distinguer les modules de conservation  $\underline{\underline{K}}_e$  et les modules de perte  $\underline{\underline{K}}_\nu^*$ .

$$s_j^2 \underline{\underline{M}} \phi_j + \left( \underline{\underline{K}}_e + \underline{\underline{K}}_\nu^*(s_j) \right) \phi_j = 0 \quad (2)$$

### 2.1 Module complexe

Le modèle à module complexe a été étudié pour sa simplicité. En effet, il peut s'écrire directement sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé.

$$\left[ s_j^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}_e + (1 + i\eta) \underline{\underline{K}}_\nu \right] \phi_j = 0 \quad (3)$$

Dans ce cas, la matrice  $\underline{\underline{K}}_\nu^*$  est complexe mais ne dépend pas de la fréquence. Le modèle ne convient donc pas à la modélisation de structures viscoélastiques puisqu'elles présentent un effet de rigidification en fonction de la fréquence.

Notons toutefois que ce modèle d'amortissement structural n'a pas de représentation temporelle et donc pas de réalité physique.

## Nomenclature

$MG[f_{\min} \quad f_{\max} [\Phi_1 \dots \Phi_k] n]$	Modèle de Maxwell généralisé de paramètres $[f_{\min} \quad f_{\max} [\Phi_1 \dots \Phi_k] n]$
$f_{\min}$	Borne inférieure du domaine fréquentiel
$f_{\max}$	Borne supérieure du domaine fréquentiel
$\Phi_i$	Valeur de la phase constante du $i^{\text{ème}}$ matériau viscoélastique
$\underline{\underline{M}}$	Matrice de masse éléments finis
$\underline{\underline{K}}$	Matrice de raideur éléments finis
$\underline{\underline{K}}^*$	Matrice de raideur complexe
$\underline{\underline{K}}_e$	Matrice de raideur élastique
$\underline{\underline{K}}_\nu$	Matrice de raideur viscoélastique
$\underline{U}$	Vecteur des déplacements aux degrés de liberté physiques
$\underline{F}$	Vecteur des efforts appliqués aux degrés de liberté physiques
$n$	Ordre du modèle de Maxwell généralisé (ou nombre de cellules)
$N$	Nombre de matériaux viscoélastiques dans la structure
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\omega_{p_i}$	Pulsation du $i^{\text{ème}}$ pôle
$\omega_{z_i}$	Pulsation du $i^{\text{ème}}$ zéro
$s$	Variable de Laplace
$\underline{\phi}$	Vecteur propre
$\underline{\psi}$	Vecteur d'état
$\eta$	Facteur de perte
$\tau_i$	$i^{\text{ème}}$ constante de temps du modèle de Maxwell généralisé
$\alpha_i$	$i^{\text{ème}}$ rigidification du modèle de Maxwell généralisé

### 2.2 Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt est plus complexe dans le sens où on ne peut pas l'écrire directement sous forme de problème aux valeurs propres généralisé.

$$\left[ s_j^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}_e + (1 + \eta s_j) \underline{\underline{K}}_\nu \right] \underline{\phi}_j = \underline{0} \quad (4)$$

Dans ce cas, la raideur est complexe et dépend linéairement de la fréquence. Néanmoins, la dépendance à la fréquence est forte et la raideur non bornée. Cela rend l'utilisation de ce type de modèle valable uniquement sur une bande étroite de fréquence.

### 2.3 Maxwell généralisé

Comme pour Kelvin-Voigt, le modèle de Maxwell généralisé ne s'écrit pas directement sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé. On peut noter que le modèle de Maxwell généralisé est très similaire à d'autres modèles tels que ADF [4] ou ATF [5]. La formulation (5) utilisée ici a été proposée précédemment dans l'article [6].

$$\left[ s_j^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}_e + \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \tau_i s_j}{1 + \tau_i s_j} \right) \underline{\underline{K}}_\nu \right] \underline{\phi}_j = \underline{0} \quad (5)$$

Cette fois, la matrice  $\underline{\underline{K}}_\nu^*$  est complexe et dépend de la fréquence. Le modèle fait intervenir de nombreux paramètres  $\alpha_i$  et  $\tau_i$ ,  $i \in \{1, n\}$ . Il permet de prendre en compte relativement facilement la rigidification ainsi que l'amortissement.

Parmi les modèles étudiés, seul le modèle de Maxwell généralisé est capable de représenter convenablement la viscoélasticité sur un domaine de fréquence « large » comme l'impose l'application au crissement de frein.

#### Remarque :

On ne considère pas les modèles à dérivées fractionnaires dans ces travaux. Malgré le nombre plus faible de paramètres par rapport à un modèle de Maxwell généralisé, ces modèles sont mal adaptés à une formulation en modèle d'état. L'alternative d'un développement en série conduit à un modèle de Maxwell généralisé.

#### 2.3.1 Calcul des paramètres de Maxwell

Le modèle de Maxwell généralisé nécessite le calcul préalable de paramètres qui détermine la forme du modèle (phase et rigidification associée).

La méthode utilisée est basée sur l'identification d'une phase expérimentale donnée. On identifie les paramètres du modèle permettant de représenter au mieux la phase.

Pour identifier cette phase, on utilise la formule (6) extraite du livre d'Oustaloup [7] qui donne la phase d'un modèle de Maxwell formulé avec des pôles et des zéros (cf. formule 5,44 du livre [7]).

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left( \arctan \left( \frac{\omega}{\omega_{z_i}} \right) - \arctan \left( \frac{\omega}{\omega_{p_i}} \right) \right) \quad (6)$$

Le calcul de la position optimale des pôles et des zéros est abordé dans les travaux de Franck Renaud [10] mais reste un problème ouvert. Une fois les pôles et zéros calculés, on



détermine les paramètres du modèle de Maxwell par les formules (7) et (8). Ce passage entre l'écriture en pôles et zéros et l'écriture en constantes de temps et rigidifications est exposé dans la thèse de Jean-Luc Dion [8].

$$\tau_i = \frac{1}{\omega_{p_i}} \quad (7)$$

$$\alpha_i = \prod_{j=1}^n \frac{\omega_{p_j} (\omega_{p_i} - \omega_{z_j})}{\omega_{z_j} (\omega_{p_i} + \omega_{p_j} (\delta_{ij} - 1))} \quad (8)$$

### 3 Analyse modale complexe

Dans cette partie, on étudie les propriétés amortissantes des matériaux en exploitant les parties réelles et imaginaires des valeurs propres obtenues par analyse modale complexe.

#### 3.1 Formulation en modèle d'état

Nous avons vu que l'équation dynamique d'une structure viscoélastique modélisée par le modèle de Maxwell généralisé peut se mettre sous la forme (5). Il ne s'agit pas d'un problème aux valeurs propres généralisé. Cette formulation n'est donc pas exploitable directement en analyse modale. Pour cela, on considère une formulation en modèle d'état. L'équation (9) donne un exemple d'écriture en modèle d'état pour un modèle de Maxwell généralisé d'ordre  $n = 1$ .

$$s_j \begin{bmatrix} -\tau_1 M & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \psi_j = \begin{bmatrix} M & \tau_1 (K_e + (1 + \alpha_1) K_\nu) & K_e + K_\nu \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \psi_j \quad (9)$$

le vecteur d'état  $\psi_j$  étant défini par :

$$\psi_j = \begin{bmatrix} s_j^2 \phi_j \\ s_j \phi_j \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad (10)$$

On est ramené à un problème aux valeurs propres généralisé de taille supérieure (multipliée par  $n + 2$  par rapport au problème de départ). On voit alors que la taille du modèle devient critique pour des ordres de Maxwell généralisé élevés. Il est alors indispensable de travailler sur des modèles réduits. Dans le cadre de cette étude, on propose une projection du modèle dans une base de Ritz constituée des modes propres réels de la structure considérée comme totalement élastique. Cette solution donne de bons résultats [9] pour les structures faiblement amorties.

#### 3.2 Prise en compte de plusieurs matériaux

Les formulations présentées jusqu'ici ne prennent en compte qu'un seul matériau viscoélastique, la structure pouvant être partiellement ou totalement viscoélastique. Or l'application de la méthode proposée à un cas industriel tel que le système de freinage impose la possibilité de considérer plusieurs matériaux viscoélastiques (matériaux de friction, « shims »).

On considère une structure composée de  $N$  matériaux viscoélastiques modélisés par un modèle de Maxwell généralisé. En reprenant le formalisme de l'équation (5), on peut écrire l'équation dynamique sous la forme :

$$s_j^2 M \phi_j + K_e \phi_j + \sum_{k=1}^N \left[ \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^k \tau_i^k s_j}{1 + \tau_i^k s_j} \right) K_\nu^k \right] \phi_j = 0 \quad (11)$$

On peut remarquer que dans le cas d'un système à 1 degré de liberté, cela reviendrait à considérer  $N$  matériaux travaillant en parallèles. La raideur équivalente est alors obtenue par sommation des raideurs propres à chaque matériau. Une vision en terme de somme d'énergies de déformation est également équivalente.

Si on écrit le problème sous forme de modèle d'état, il sera de taille  $N \times n + 2$  fois la taille du modèle éléments finis de départ. Dans ce cas, même en travaillant avec un modèle réduit, les modèles sont trop grands et présentent des problèmes de conditionnement.

#### 3.3 Simplification par pôles communs

Afin de résoudre le problème soulevé à la question précédente, on formule l'hypothèse de travail suivante : « Les constantes de temps  $\tau_i$  sont égales pour tous les matériaux viscoélastiques » Par conséquent, l'équation (11) peut s'écrire :

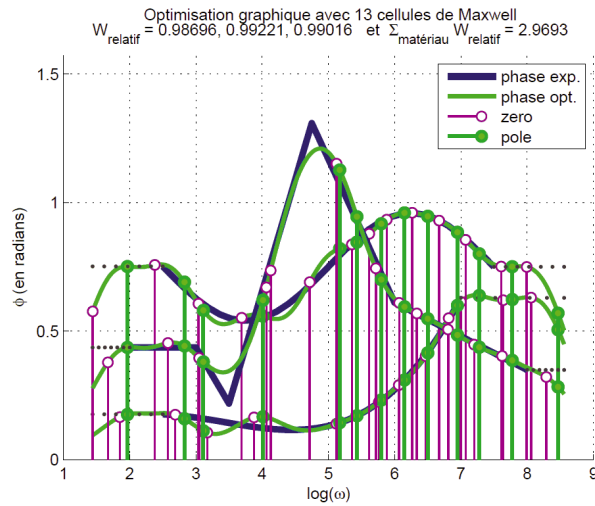
$$s_j^2 M \phi_j + K_e \phi_j + \sum_{k=1}^N \left[ \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^k \tau_i s_j}{1 + \tau_i s_j} \right) K_\nu^k \right] \phi_j = 0 \quad (12)$$

Le modèle d'état associé a la même taille qu'un modèle à 1 matériau viscoélastique.

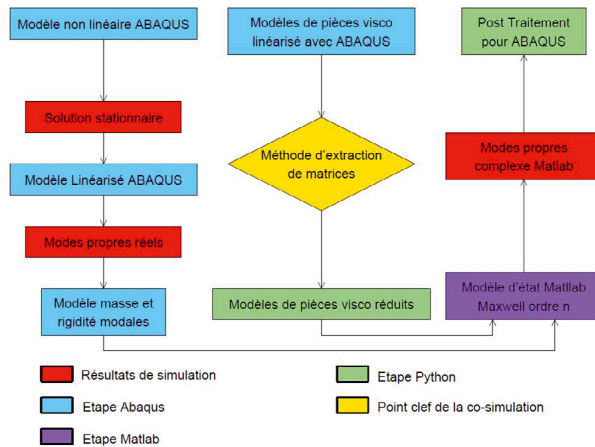
Les travaux de Renaud [10] ont montré que cette hypothèse n'est pas une contrainte forte sur la détermination de la position des pôles et des zéros pour estimer un ensemble de courbes de phase expérimentales (cf. Fig. 1).

### 4 Applications

On dispose maintenant d'une formulation éléments finis par modèle d'état d'un problème de dynamique des structures faisant intervenir des matériaux viscoélastiques. Le traitement de problèmes d'analyse modale complexe formulés en modèle d'état ne peut pas se faire directement dans Abaqus®, qui est le code de calcul utilisé par Bosch® Système de freinage, notamment



**Fig. 1.** Estimation de phases quelconques différentes pour trois parties viscoélastiques avec pôles égaux.

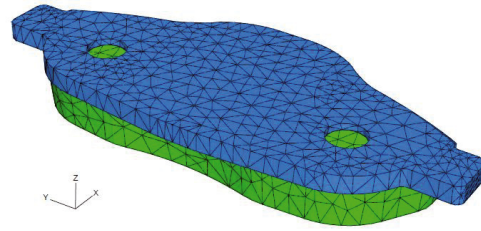


**Fig. 2.** Principe de la simulation mixte Abaqus®/Matlab®.

car les matériaux utilisés ne sont pas isotropes [11]. Il est alors nécessaire de considérer une simulation mixte Abaqus®/Matlab®. L'idée est d'effectuer la majeure partie de la simulation dans Abaqus® (mise en pression du frein, mise en rotation du disque, analyse modale réelle). L'ensemble des données nécessaires au calcul des modes complexes est ensuite transféré vers Matlab® par un programme Python. La figure 2 en illustre ce principe.

#### 4.1 Plaquette

Dans cette partie, on présente quelques résultats obtenus sur un modèle de plaquette. Il s'agit d'une plaquette extérieure T7 comportant un seul matériau viscoélastique (la garniture). La figure 3 montre le modèle éléments finis utilisés.



**Fig. 3.** Modèle de plaquette de frein T7.

**Tableau 1.** Recalage en fréquence d'une plaquette T7.

	Recalage en fréquence		
	$f_{FRF}$ (Hz)	$f_{calcul}$ (Hz)	Ecart
Mode 1	2461	2485	0,99 %
Mode 2	4264	4239	-0,58 %
Mode 3	4979	4988	0,17 %
Mode 4	7512	7492	-0,27 %
Mode 5	7796	7844	0,62 %

**Tableau 2.** Recalage en amortissement d'une plaquette T7.

	Recalage en amortissement		
	$\xi_{FRF}$ (%)	$\xi_{calcul}$ (%)	Ecart
Mode 1	1,21	1,69	39,67 %
Mode 2	1,49	1,50	0,67 %
Mode 3	1,78	1,40	-21,35 %
Mode 4	1,39	1,50	7,91 %
Mode 5	1,67	1,50	-10,18 %

L'objectif était de procéder à un recalage des paramètres matériaux de la plaquette, en fréquence et amortissement, par rapport à des résultats de mesure FRF.

On présente dans les tableaux 1 et 2 les résultats d'un recalage en fréquence et amortissement pour les 5 premiers modes propres de la plaquette. Le calcul Abaqus® est conduit avec les données statiques du matériau. On applique le modèle viscoélastique MG[0.01 20000 [6] 7].

On voit que le modèle proposé permet un très bon recalage en fréquence (moins de 1 % d'écart sur les 5 premiers modes) tout en ayant un recalage très correct sur les amortissements. En effet, en tenant compte de la difficulté de mesure de l'amortissement ainsi que de la difficulté de modélisation, un écart de moins de 40 % sur les 5 premiers modes est tout à fait acceptable.

#### 4.2 Frein

Dans cette partie, on présente quelques résultats obtenus sur un modèle de frein complet. Il s'agit d'analyses modales complexes avec prise en compte des matériaux viscoélastiques des deux garnitures et du « shim ». Dans un premier temps, les calculs sont faits sans prise en compte du contact plaquettes-disque puis avec le contact.

Il s'agit d'un modèle non recalé destiné à l'illustration de la prise en compte de la viscoélasticité sur un modèle industriel.

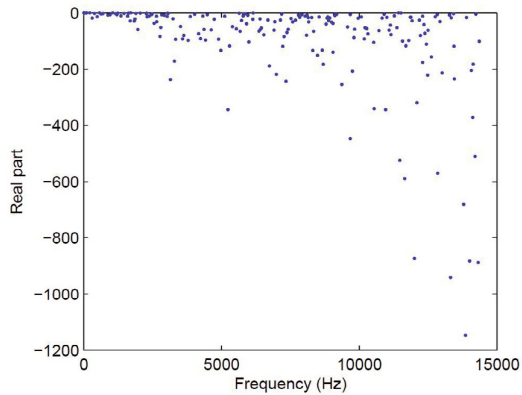


Fig. 4. Partie réelle pour chaque mode propre.

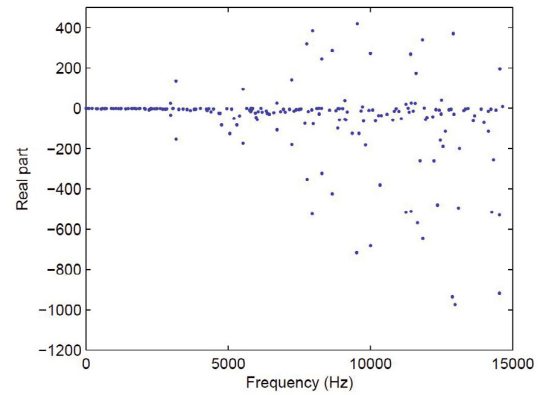


Fig. 6. Partie réelle pour chaque mode propre.

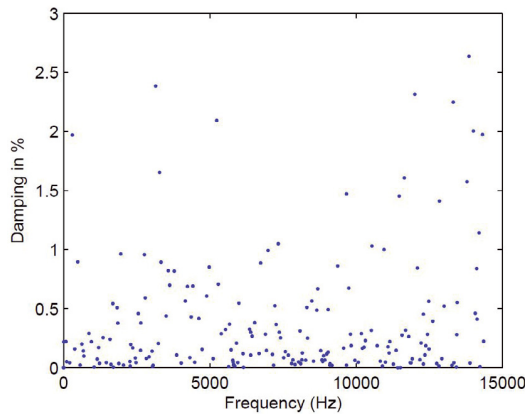


Fig. 5. Amortissement pour chaque mode propre.

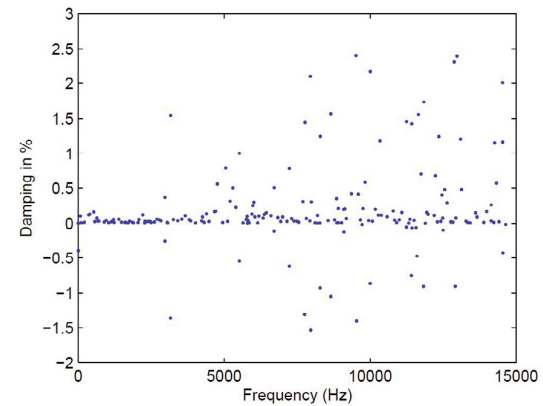


Fig. 7. Amortissement pour chaque mode propre.

#### 4.2.1 Simulation sans contact

Dans ce cas, il n'y a aucun couplage tangentiel entre les plaquettes et le disque. Comme il s'agit de la seule source d'instabilité dans le système, on n'observera pas de modes instables.

Les figures 4 et 5 illustrent l'impact de la viscoélasticité sur, respectivement, les parties réelles et les amortissements.

On observe une diminution globale de la partie réelle des valeurs propres complexes. Cela se traduit aussi par l'apport d'amortissement dans la structure. Le résultat obtenu sur cette structure partiellement viscoélastique est tout à fait celui attendu. De plus, l'ordre de grandeur des amortissements obtenus correspond à celui observé dans le cas d'un calcul sur une plaquette seule (cf. Tab. 2).

Il est également intéressant de noter que tous les modes ne sont pas affectés de la même façon par la viscoélasticité. Dans la Section 4.2.3, on établit le lien entre l'amortissement observé et la répartition d'énergie de déformation.

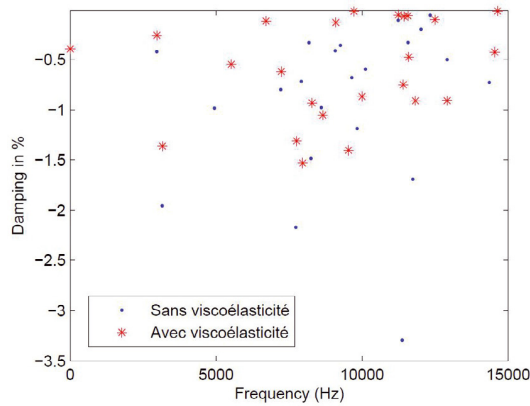
#### 4.2.2 Simulation avec contact

Dans ce cas, le couplage tangentiel entre les plaquettes et le disque est pris en compte (on n'exposera pas le calcul de la matrice de raideur de couplage). Le modèle de contact tangentiel ne correspond pas à celui de Abaqus®. On ne comparera donc pas de résultats d'analyse modale complexe obtenus avec Matlab® et Abaqus®.

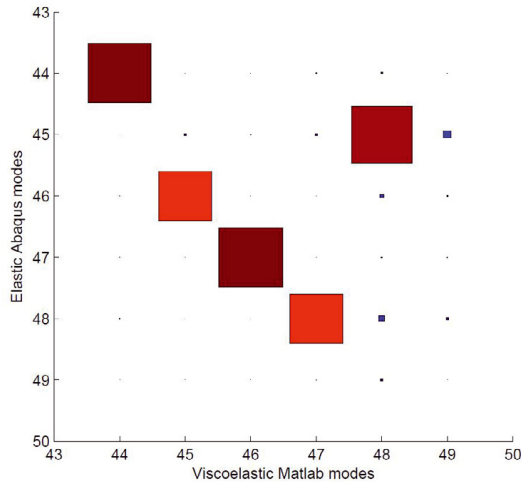
De la prise en compte du couplage tangentiel résulte l'apparition de modes instables. Cela se traduit par des parties réelles positives (cf. Fig. 6) ou des amortissements négatifs (cf. Fig. 7).

Afin de mieux mettre en évidence l'impact de la viscoélasticité sur les modes instables, on superpose les amortissements négatifs obtenus avec et sans viscoélasticité. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 8.

On observe globalement une diminution du niveau de l'instabilité avec la viscoélasticité. En effet, l'amortissement injecté par le modèle de Maxwell généralisé tend à compenser l'amortissement négatif des modes instables. La présence de rigidification dans le modèle de Maxwell se traduit par un décalage fréquentiel des modes amortis. Il est alors difficile de conclure sur l'évolution du niveau d'instabilité d'un mode en particulier. Il faut



**Fig. 8.** Comparaison de l'amortissement avec et sans viscoélasticité pour chaque mode propre.



**Fig. 9.** Corrélation des modes élastiques Abaqus® et des modes « viscoélastiques » Matlab®.

également garder à l'esprit que l'ajout d'amortissement dans un système n'est pas toujours source de stabilisation. Ce phénomène est illustré dans [12].

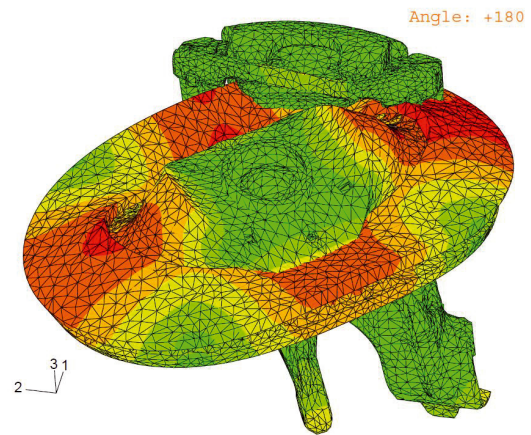
#### 4.2.3 Lien avec les énergies de déformation

Pour mettre en évidence le lien entre l'amortissement et la répartition d'énergie dans le frein, on va s'intéresser à 2 modes particuliers. Le premier (mode 46) est faiblement amorti tandis que le second (mode 48) l'est fortement.

Pour connaître le numéro des modes élastiques correspondants (calculés précédemment par Abaqus®), on trace le diagramme de MAC présenté sur la figure 9.

On voit qu'il y a un phénomène d'inversion de modes qui vient de l'ajout du modèle viscoélastique. En effet, en plus d'apporter de l'amortissement, il y a un effet de rigidification qui va décaler plus ou moins les modes amortis.

Le mode « viscoélastique » 46 correspond au mode élastique 47.



**Fig. 10.** Déformée du mode 46.

**Tableau 3.** Récapitulatif de l'énergie de déformation pour le mode 46 d'un frein A5X.

Pièce	Ratio $E_d$
Modèle complet	100,00 %
Chape	0,33 %
Etrier	0,06 %
Disque	91,54 %
Moyeu	4,91 %
Plaquette intérieure	0,80 %
Porte fusée	1,54 %
Plaquette extérieure	0,79 %
Piston	0,01 %
Ensemble viscoélastique	1,50 %

Le mode « viscoélastique » 48 correspond au mode élastique 45.

On commence par étudier le mode « viscoélastique » 46 qui présente un amortissement faible (3045 Hz et 0,012 %). Sa déformée est visible sur la figure 10.

On établit le récapitulatif de l'énergie de déformation  $E_d$  contenue dans chaque pièce du frein et on calcule le ratio d'énergie contenue dans chaque pièce par rapport à l'énergie totale. Le résultat est présenté dans le tableau 3.

On constate que la majeure partie de l'énergie de déformation est contenue dans le disque (on le voit aussi sur la déformée Fig. 10). La faible quantité d'énergie contenue dans l'ensemble des parties viscoélastiques est en accord avec l'amortissement faible pour ce mode.

On regarde maintenant un mode plus amorti. Il s'agit du mode « viscoélastique » 48 (3148 Hz et 2,385 % d'amortissement). Sa déformée est visible sur la figure 11.

Comme pour le mode précédent, on établit le récapitulatif de l'énergie de déformation  $E_d$  contenue dans chaque pièce du frein et on calcule le ratio d'énergie contenue dans chaque pièce par rapport à l'énergie totale. Le résultat est présenté dans le tableau 4.

On constate cette fois que la majeure partie de l'énergie de déformation est contenue dans les parties viscoélastiques (et principalement la plaquette intérieure). Ceci est en accord avec l'observation visuelle



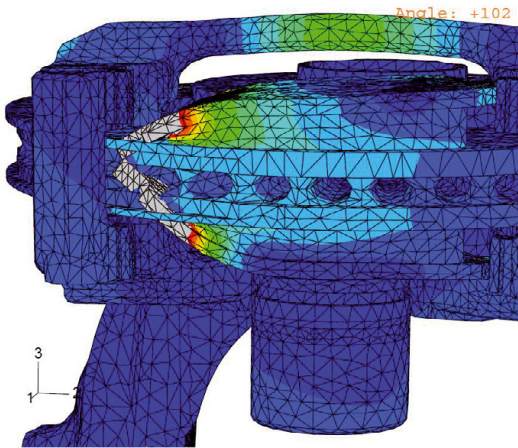


Fig. 11. Déformée du mode 48.

Tableau 4. Récapitulatif de l'énergie de déformation pour le mode 48 d'un frein A5X.

Pièce	Ratio $E_d$
Modèle complet	100,00 %
Chape	0,94 %
Etrier	3,75 %
Disque	4,07 %
Moyeu	0,06 %
Plaquette intérieure	76,77 %
Porte fusée	0,25 %
Plaquette extérieure	13,81 %
Piston	0,35 %
Ensemble viscoélastique	86,01 %

de la déformée (Fig. 11) qui montre un mode de plaquette, et avec l'amortissement important obtenu pour ce mode.

La correspondance directe entre la répartition d'énergie de déformation dans le frein et l'amortissement permet d'envisager une autre façon de traiter l'amortissement. En effet, on pourrait choisir d'affecter une valeur d'amortissement à chaque partie viscoélastique (et même à chaque pièce métallique du frein) pondérée par le ratio d'énergie de déformation contenue dans celle-ci. Il ne s'agirait pas de reproduire les effets de la viscoélasticité car l'effet de rigidification ne serait pas pris en compte, mais bien de modéliser l'amortissement dans le système sans passer par un modèle mathématique complexe.

En revanche, il n'est pas certain que le calcul et le post-traitement des énergies de déformation soient moins coûteux que l'analyse modale complexe avec un modèle de Maxwell.

## 5 Analyses paramétriques

Afin réduire les temps de calcul, on travaille avec des modèles réduits par projection sur une base de Ritz constituée des modes propres réels de la structure élastique. Comme cette base est tronquée, il est nécessaire

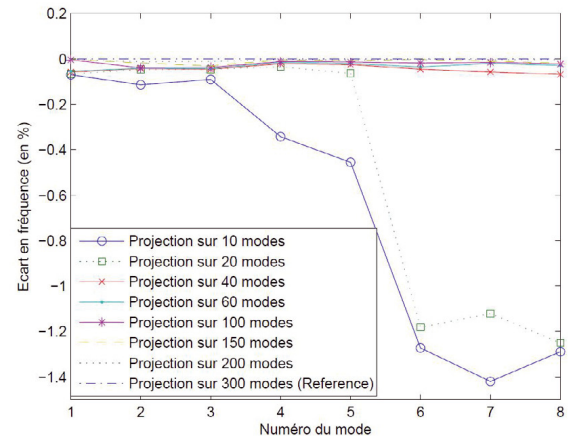


Fig. 12. Ecart en fréquences calculé par analyse modale complexe pour chaque modèle réduit.

d'étudier l'impact de la troncature sur les résultats d'analyse modale complexe.

L'influence du nombre de cellules de Maxwell est également étudiée.

### 5.1 Plaquette

On considère le modèle de plaquette T7 décrit dans la Section 4.1.

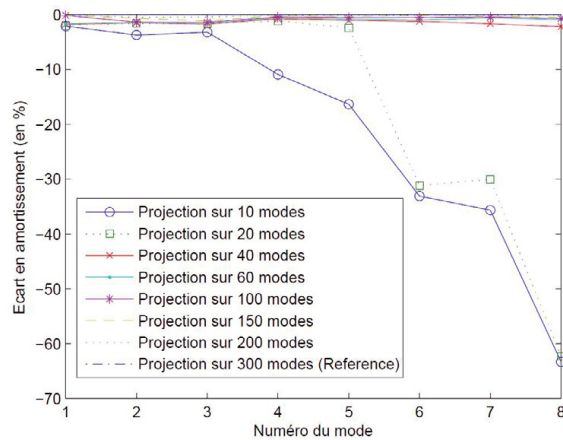
#### 5.1.1 Influence du nombre de modes de projection

La méthode consiste à extraire successivement 10, 20, 40, 60, 100, 150, 200 puis 300 modes réels et à projeter le modèle sur ces bases. On calcule alors les modes complexes pour chaque modèle réduit. On prend en compte la viscoélasticité par un modèle de Maxwell généralisé d'ordre 4 dont les paramètres sont : MG[5 20000 3 4]. On obtient alors les fréquences et amortissements de tous les modes pour chaque modèle réduit.

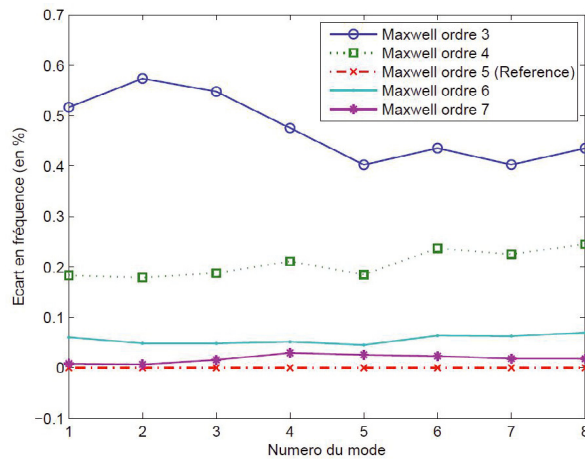
On s'intéresse uniquement aux 8 premiers modes de la plaquette. On trace l'écart en pour cent entre les résultats de chaque modèle réduit et les résultats du dernier (projeté sur 300 modes). Les résultats en fréquence et en amortissement sont illustrés respectivement sur les figures 12 et 13.

On observe un effet de convergence vers la référence avec l'augmentation du nombre de modes de projection. On peut considérer qu'il faut un minimum de 40 modes pour obtenir un modèle réduit correct (pour étudier les 8 premiers modes).

De plus, on remarque que l'ordre de grandeur des écarts entre 10 et 40 modes est le même que celui du recalage présenté à la Section 4.1. Il est donc nécessaire d'être vigilant quand aux nombres de modes retenus pour la réduction du modèle.



**Fig. 13.** Ecart en amortissements calculé par analyse modale complexe pour chaque modèle réduit.

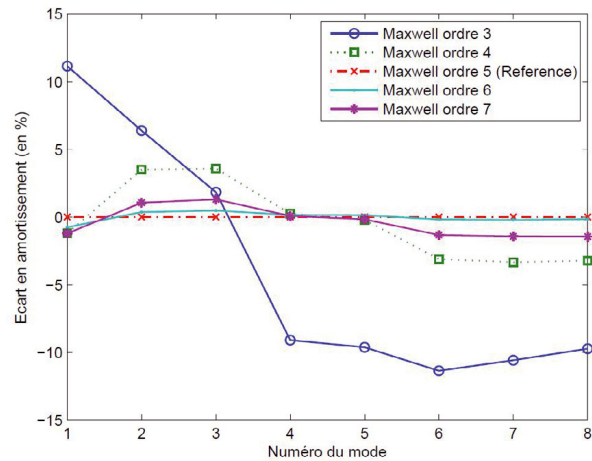


**Fig. 14.** Effet de l'ordre du modèle de Maxwell sur les fréquences.

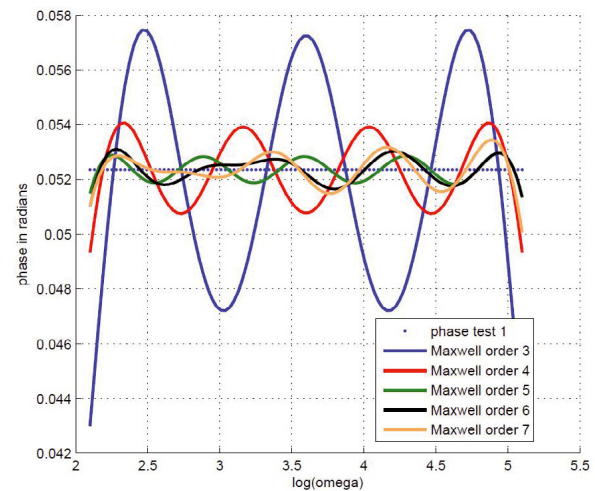
### 5.1.2 Influence du nombre de cellules de Maxwell

Afin de s'affranchir des problèmes liés à la réduction du modèle, on travaille avec un modèle projeté sur 60 modes réels. La méthode consiste alors à fixer un intervalle de fréquence de 3 décades (de 20 Hz à 20 000 Hz) et une phase constante à 3 degrés. On calcule successivement les fréquences et amortissements par analyse modale complexe en faisant varier l'ordre du modèle de Maxwell généralisé de 3 (1 cellule par décade) à 7. On s'intéresse à l'influence de ce paramètre sur l'oscillation de la phase du modèle de Maxwell ainsi que son impact sur les fréquences (cf. Fig. 14) et amortissements (cf. Fig. 15).

La référence correspond à l'ordre 5 car pour les ordres supérieurs la phase du modèle de Maxwell n'oscille plus de façon régulière et avec une amplitude constante (cf. Fig. 16). Cela est dû à un mauvais positionnement des pôles et des zéros car la méthode d'optimisation utilisée ne permet pas le contrôle de leur position. Un algorithme



**Fig. 15.** Effet de l'ordre du modèle de Maxwell sur les amortissements.



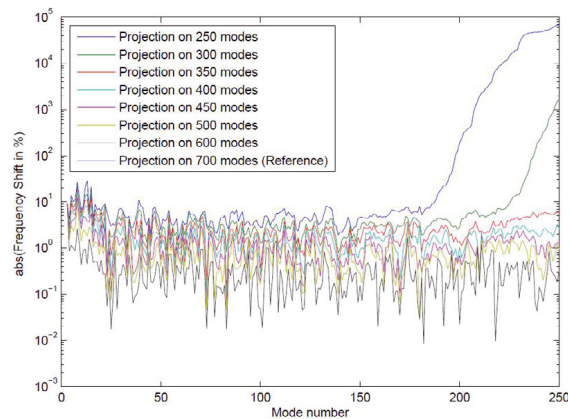
**Fig. 16.** Effet de l'ordre du modèle de Maxwell sur l'oscillation de la phase.

amélioré a été développé, entre temps, par Renaud mais n'a pas été utilisé pour ces travaux.

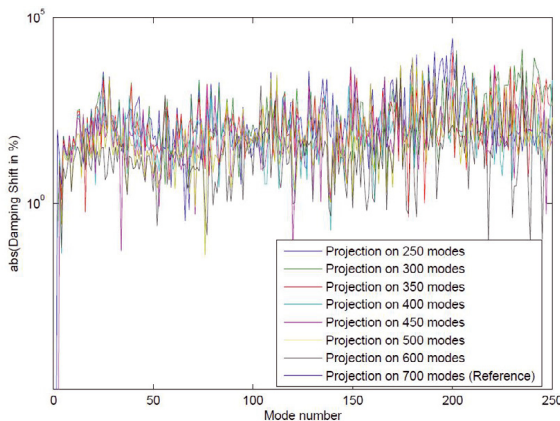
On observe le même effet de convergence que précédemment. Les écarts observés sont plus faibles que pour le nombre de modes de projection. D'autres essais ont montré que la valeur de la phase a un impact sur les écarts en fréquence mais peu sur les amortissements. Il est plus difficile de conclure sur le nombre de cellules à utiliser. En effet, l'augmentation de l'ordre impacte les écarts de manière positive et la taille du modèle et son conditionnement de manière négative. Un bon compromis est l'utilisation d'une cellule par décade plus une ou deux.

## 5.2 Frein

On utilise le même modèle de frein que dans la Section 4.2.



**Fig. 17.** Fréquences calculées par analyse modale complexe pour chaque modèle réduit.



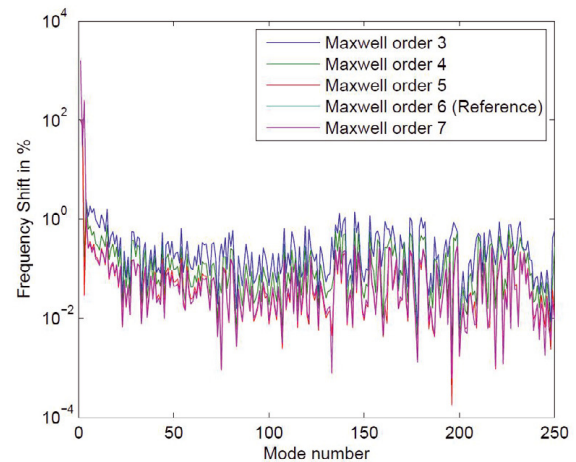
**Fig. 18.** Amortissements calculés par analyse modale complexe pour chaque modèle réduit.

### 5.2.1 Influence du nombre de modes de projection

La méthode est très similaire à celle de la plaquette. On extrait successivement 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 puis 700 modes réels et on projette le modèle sur ces bases. On calcule alors les modes complexes pour chaque modèle réduit. On prend en compte la viscoélasticité par un modèle de Maxwell généralisé d'ordre 5 dont les paramètres sont :  $MG[1 \ 20\,000 \ [3 \ 3 \ 7] \ 5]$ . On obtient alors les fréquences et amortissements de tous les modes pour chaque modèle réduit.

On s'intéresse uniquement aux 250 premiers modes du frein. On trace l'écart en pour cent entre les résultats de chaque modèle réduit et les résultats du dernier (projeté sur 700 modes). Les résultats en fréquence sont illustrés sur la figure 17. Les résultats en amortissement sont illustrés par la figure 18. On utilise une vue avec une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées.

Comme dans le cas de la plaquette, on observe un effet de convergence vers la référence avec l'augmentation du nombre de modes de projection. Cet effet est clairement



**Fig. 19.** Effet de l'ordre du modèle de Maxwell sur les fréquences.

visible pour les fréquences mais pas pour les amortissements pour lesquels l'écart mesuré est très élevé pour un grand nombre de modes et ce, quel que soit le nombre de modes de projection.

On peut considérer qu'une projection sur 400 modes réels est nécessaire pour étudier les 250 premiers modes complexes.

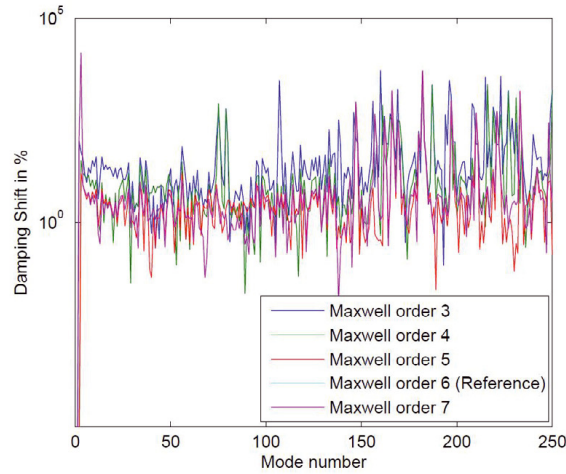
On peut également noter que les écarts peuvent être très importants (plus de 1000 %) dans le cas d'une troncature trop forte de la base de Ritz. Il faut donc rester très vigilant sur le nombre de modes observables pour une troncature donnée.

### 5.2.2 Influence du nombre de cellules de Maxwell

Afin de s'affranchir des problèmes liés à la réduction du modèle, on travaille avec un modèle projeté sur 500 modes réels. La méthode consiste alors à fixer un intervalle de fréquence de 3 décades (de 20 Hz à 20 000 Hz) et une phase constante à 3 degrés pour les matériaux de friction et 7 degrés pour le shim. On calcule successivement les fréquences et amortissements par analyse modale complexe en faisant varier l'ordre du modèle de Maxwell généralisé de 3 à 7. On s'intéresse à l'influence de ce paramètre sur l'oscillation de la phase du modèle de Maxwell ainsi que son impact sur les fréquences et amortissements.

Regardons maintenant l'impact sur les fréquences et les amortissements de cette augmentation de l'ordre du modèle. Les figures 19 et 20 montrent les résultats obtenus en échelle logarithmique. Pour les mêmes raisons que pour la plaquette, l'ordre de référence n'est pas l'ordre le plus élevé.

De même que pour l'analyse sur le nombre de modes de projection, on obtient des écarts sur les amortissements qui atteignent des valeurs élevées, principalement pour les modes haute fréquence par rapport au domaine d'intérêt. La section suivante a pour but d'analyser ce phénomène.



**Fig. 20.** Effet de l'ordre du modèle de Maxwell sur les amortissements.

**Tableau 5.** Fréquence et amortissement du mode 113 pour chaque ordre de Maxwell.

Ordre Maxwell	Fréquence (Hz)	Amortissement
Ordre 3	8565,8	0,0103 %
Ordre 4	8592,3	0,0078 %
Ordre 5	8600,8	0,0030 %
Ordre 6	8599,6	0,0030 %
Ordre 7	8600,7	0,0030 %

**Tableau 6.** Fréquence et amortissement du mode 121 pour chaque ordre de Maxwell.

Ordre Maxwell	Fréquence (Hz)	Amortissement
Ordre 3	9127,5	0,0121 %
Ordre 4	9171,9	0,0110 %
Ordre 5	9183,8	0,0021 %
Ordre 6	9184,5	0,0021 %
Ordre 7	9183,6	0,0021 %

### 5.2.3 Étude des modes présentant un écart important sur l'amortissement

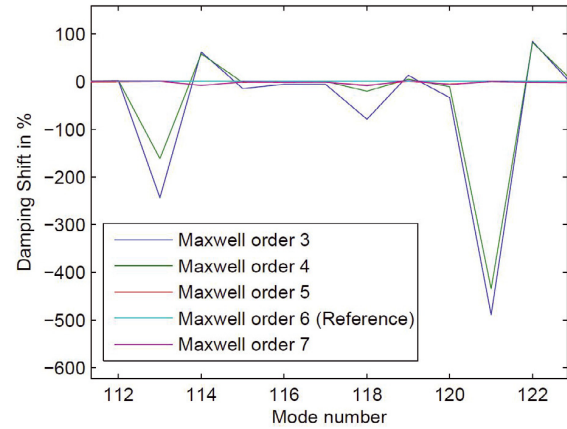
On va restreindre l'étude au cas de l'analyse de l'effet du nombre de cellules de Maxwell. On va également limiter le nombre de modes étudiés à 2. On choisit les modes 113 et 121.

Les résultats obtenus pour les deux modes retenus sont présentés dans les tableaux 5 et 6.

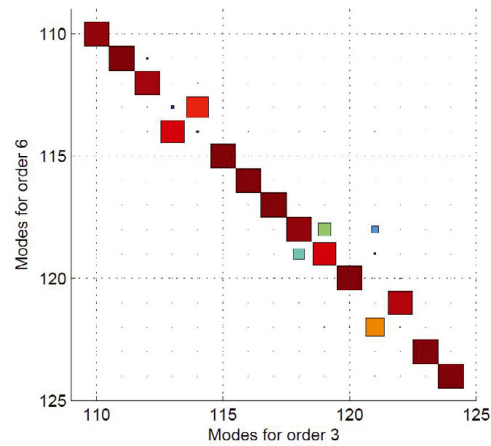
Pour les deux modes 113 et 121, on constate qu'il y a un écart important sur l'amortissement des ordres 3 et 4 par rapport à l'ordre de référence (ordre 6). La figure 21 illustre ces observations.

L'écart observé vient d'une inversion de modes. Le mode 113 calculé pour un ordre 3 ou 4 du modèle de Maxwell n'est plus le même que le mode 113 calculé avec un modèle d'ordre 6, de même que pour le mode 121.

Pour confirmer cette interprétation, on trace les diagrammes de MAC.



**Fig. 21.** Ecart en amortissement pour les modes 113 et 121 en fonction du nombre de cellules de Maxwell.



**Fig. 22.** Corrélation des modes ordre 3-ordre 6.

- On trace la corrélation entre les modes calculés avec un modèle viscoélastique d'ordre 3 et ceux calculés avec un modèle viscoélastique d'ordre 6 (Fig. 22).
- On trace la corrélation entre les modes calculés avec un modèle viscoélastique d'ordre 4 et ceux calculés avec un modèle viscoélastique d'ordre 6 (Fig. 23).

On voit qu'il y a bien un problème dans l'ordre des modes. Après les avoir réordonnés correctement, on peut retracer la courbe d'écart en amortissement (Fig. 24). Les écarts observés sont désormais parfaitement cohérents, aussi bien pour le mode 113 que 121. Il suffit alors d'appliquer la même méthode à tous les modes présentant un écart trop important.

## 6 Conclusion

Au terme de cette étude, plusieurs objectifs ont été atteints :

- on dispose d'une modélisation mathématique du comportement viscoélastique d'un matériau. Ce modèle



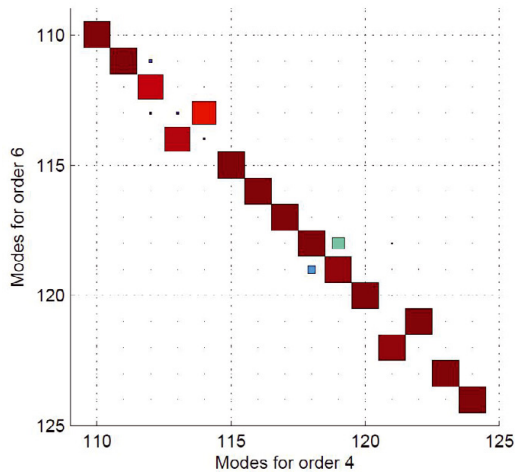


Fig. 23. Corrélation des modes ordre 4 - ordre 6.

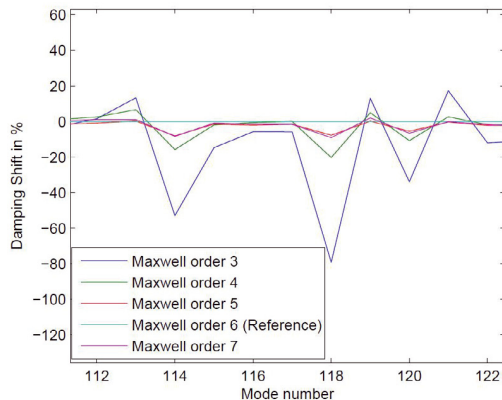


Fig. 24. Ecart en amortissement pour les modes 113 et 121 après correction de l'ordre des modes.

peut traduire un effet de rigidification en fonction de la fréquence ainsi que l'amortissement ;

- on dispose d'une implémentation de ce modèle dans le cadre d'analyse modale complexe. Il est possible de traiter des problèmes avec des structures faisant intervenir plusieurs matériaux viscoélastiques à priori différents à condition qu'ils soient tous modélisés par un modèle de Maxwell généralisé ;
- on dispose d'une passerelle logicielle développée en Python permettant la simulation mixte Abaqus®/Matlab® afin d'appliquer les modèles viscoélastiques aux modèles de frein Bosch ;

- on a également mis en évidence l'impact important de la troncature modale et de l'ordre des modèles de Maxwell généralisé sur les résultats d'analyse modale complexe.

Les perspectives de cette étude sont l'utilisation de la méthode pour la prédiction des instabilités de freinage ainsi que pour l'aide au choix des matériaux. La prise en compte des effets de la température pourrait être une voie d'amélioration des méthodes de simulation utilisées par Bosch système de freinage.

## Références

- [1] N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier, L. Gaul, A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations, *Mechanics Research Communications* 29 (2002) 197–205
- [2] N.M. Kinkaid, O.M. O'Reilly, P. Papadopoulos, Automotive disc brake squeal, *J. Sound Vib.* 267 (2003) 105–166
- [3] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, L. Jézéquel, Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal, *J. Sound Vib.* 307 (2007) 591–609
- [4] G.A. Lesiutre, K. Govindswamy, Finite element modeling of frequency dependent and temperature-dependent dynamic behavior of viscoelastic materials in simple shear, *Int. J. Solids Struct.* 33 (1996) 419–432
- [5] G.A. Lesiutre, Finite elements for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties, *Int. J. Solids Struct.* 29 (1992) 1567–1579
- [6] G. Chevallier, L. Levy, J.-L. Dion, Étude des dispositifs de contrôle passif du crissement de frein, in *Actes du colloque vibrations, chocs et bruits*, Lyon, 2006
- [7] A. Oustaloup, *La commande CRONE*. HERMES, 1991
- [8] J.-L. Dion, Modélisation dynamique des suspensions hydroélastiques, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1995
- [9] E. Balmès, J.-M. Leclère, Viscoelastic vibration toolbox. User's guide, SDTools, 2007
- [10] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, Identification des paramètres du modèle de Maxwell généralisé sur des courbes expérimentales de module et de phase, in *Actes du colloque vibrations, chocs et bruits*, Lyon, 2008
- [11] ABAQUS/Std. *Analysis User's Manual*. Chap. 17.7.2. Abaqus v6.7 Documentation collection, 2007
- [12] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, L. Jézéquel, Effects of damping on brake squeal coalescence patterns – application on a finite element model, *Mechanics Research Communications* 34 (2007) 181–190

## Annexe D

# Amortissement des vibrations par frottement sec

### Contenu du chapitre

Les principaux articles ou actes de congrès sont repris dans cette partie, soient :

- [1] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Micro-slip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02 :281, 2010.
- [2] J.-L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 00 :000, 2012.
- [3] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-L. Dion. A numerical quasi-static method for the identification of frictional dissipation in bolted joints. Chicago, USA, 2012. ASME IDETC.



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

## Mechanical Systems and Signal Processing

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/ymssp](http://www.elsevier.com/locate/ymssp)

## Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding

Jean-Luc Dion<sup>a,\*</sup>, Gaël Chevallier<sup>a</sup>, Nicolas Peyret<sup>a,b</sup><sup>a</sup> SUPMECA, EA 2336, 3 rue Fernand Hainaut-93400 Saint-Ouen, France<sup>b</sup> ENPC, 6-8 Avenue Blaise Pascal Cité Descartes, Champs sur Marne, 77455 Marne la Vallée, France

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 20 October 2011

Received in revised form

28 July 2012

Accepted 2 August 2012

## Keywords:

Jointed-structure

Micro-sliding

Non-linear damping

## ABSTRACT

This paper deals with the damping caused by friction in joints. A new test bench is presented and justified by comparisons made with devices described in the literature. The purpose of this academic bench is to measure the damping induced by partial slip and friction in a planar joint. Moreover, allows uncoupling normal static and dynamic tangential forces. A new method for so-called stopped-sine excitation was developed. It allows more precise monitoring of the evolution of the vibration frequency and damping of non-linear modes. This method is associated with piezoelectric exciters for greater efficiency when stopping excitation. A large number of experimental results are presented and discussed. They are used to characterize the damping induced by micro-sliding in the bonds.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

The problem of damping remains a considerable challenge when computing the vibration levels of built-up structures. Simulation tools, Computer Aided Design and the Finite Element Method are used to predict both inertia and stiffness with fairly good accuracy, but damping is often badly estimated, meaning that vibration levels are also wrongly predicted. Damping can be induced in several ways, for example, by viscoelastic materials, pressure loss in fluids and solid friction. Information on the latter remains quite sparse, whereas joints, such as welded points, bolted joints or rivets, are widely used to link the parts of a mechanism or a structure.

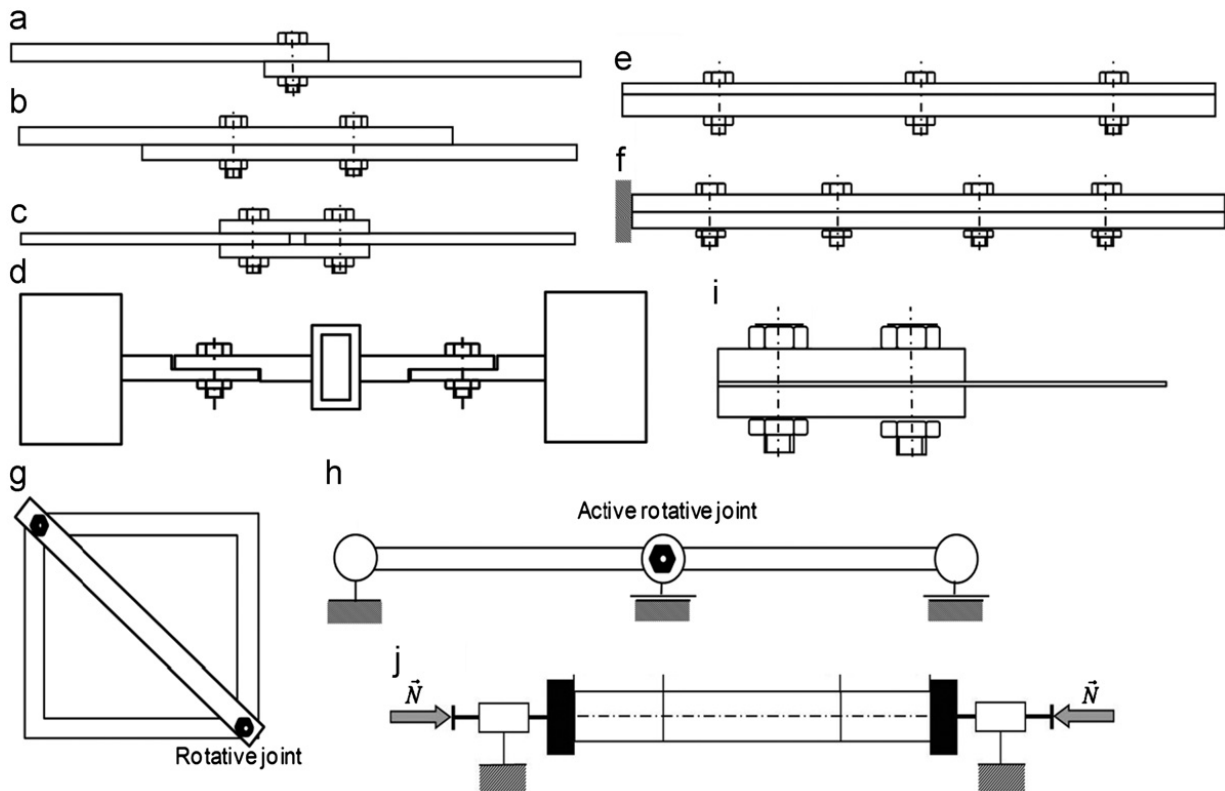
## 1.1. State of the art

In brief, there are two distinct dissipation mechanisms. In the first, damping is caused by macroslip: Berthillier et al. [3], Whiteman et al. [10], Poudou et al. [7], Korkmaz et al. [16], and Chevallier et al. [5]. In the second, damping is caused by the structure itself through an internal joint between the parts in which micro-slips induce energy losses. Many learned authors (Goodman et al. [14], Beards et al. [2], Pian [6], and Ungar [9]), have designed several experimental testing devices to highlight the fact that the damping value in assembled structures is much greater than the inherent damping value of the material, see Fig. 1.

This section provides an examination of the advantages of most of the experimental setups used, according to their design properties and their experimental processes. Particular attention has been given to the coupling between the

\* Corresponding author. Tel.: +33 1 49 45 29 12; fax: +33 1 49 45 29 69.

E-mail address: [jean-luc.dion@supmeca.fr](mailto:jean-luc.dion@supmeca.fr) (J.-L. Dion).



**Fig. 1.** Examples of testing devices developed to highlight friction induced damping in joints a. Beam assembly with a single bolted joint from Ahmadian et al. [23]- b. Beam assembly with two bolted joints from Methereil et al. [17] and Esteban et al. [13]- c. Beam assembly symmetrically screwed with two bolted joints from Song et al. [33]- d. Structure with two blocks, one spring and beam assembly with two bolted joints and with special lap joint geometry from Goyder et al. [38]- e. Beam assembly with distributed bolted joints in free condition from Heller et al. [15],[34]- f. Beam assembly with distributed bolted joints in clamped-free condition from Goodman et al. [14], Nanda et al. [19] [31]- g. Polyarticulated structure with rotating friction joints from Beards et al. [2]- h. Beam assembly with an active rotative joint from Gaul et al. [30]- i. Cantilever quartz beam dedicated to studying microsliding in the clamp from Nouria et al. [36]- j. Clamp clamp cutted beam with pure microsliding at the interfaces from Peyret et al. [20].

tangential and normal loads in the joints which makes the experiments quite hard to perform, as the limit of sliding depends on the normal load dynamics.

Ahmadian et al. [23], Fig. 1a, worked on a specimen composed of two beams with a longitudinal interface screwed by a single bolted joint. Their specimen was studied under free conditions on its first bending mode. This configuration led to considerable coupling between the normal and the tangential stress due to boundary effects in the region of the joint. In order to limit the coupling, Methereil et al. [17] and Esteban et al. [13], Fig. 1b, suggested a very similar configuration to [23]. However, the interface-length was greater and there were two bolted joints. Nanda [31], Fig. 1c, introduced symmetry in his specimen to avoid coupling between the normal and tangential stress.

Goodman et al. [14] and Nanda et al. [19,31], Fig. 1f, worked on a structure composed by two beams with a longitudinal interface screwed by distributed bolted joints. Their specimen was studied in clamped-free conditions on its first bending mode. This configuration led to limiting the coupling between the normal and the tangential stress due to the distribution of the joint along the length of the specimen. Goodman and Klumpp and Ren and Beards [15], [34], Fig. 1e, improved the previous specimen, by reducing the thickness of the upper beam to obtain better distribution of the normal stresses. Moreover their tests were performed under free conditions, in order to eliminate experimental difficulties due to clamped conditions. Nouria et al. [36] proposed a cantilever beam, Fig. 1i. Their study focused on micro-sliding between the clamped structure and the beam. In this device, due to the thickness of the clamp, the pressure distribution is directly linked to the roughness and the flatness of the parts. Beards et al. [2] and Yang et al. [30], Fig. 1g and h, worked on structures with rotational slips in joints. This type of specimen avoided coupling between the normal and the tangential stress and provided better control of the normal load. In a previous work Peyret et al. [20] studied Energy Losses on a new test bench, Fig. 1j. This new academic test assembly was developed due to the difficulty, experimentally, of ensuring constant normal stress in the previous test benches such as those suggested by Goodman et al. [14] and Methereil et al. [17], see Fig. 1. N. Peyret's theoretical work aimed at justifying the design of a structure for which the normal stresses do not depend on time and vibration motion. Their study proposed a clamped-clamped beam where the interfaces were normal to the neutral axis and located where the bending-induced normal stresses were nil. They demonstrated that the loss factor obtained is non-linearly dependent on the amplitude of the load.

The friction-induced Energy-Losses (EL) in the joints are closely related to their design. Considering the examples presented above, when the interfaces are large enough and the parts are thick, cases b, e, i, and j, the distribution of normal stress at the interface depends on surface defects (roughness and flatness). The real contact area and the normal stress distribution can be found using Greenwood-like [37] theories. If the parts are thin or the contact areas are small enough, as in cases a, c, d, f and g, the distribution of the normal stress is a function of the volumetric strains of the parts, therefore the contact area for the bolted joints is classically defined by Rötchar's pressure cone [35].

For cases a–f, i, and j the bending modes of the structure induce shear stress in the joints that can lead to micro-sliding. In cases g and h, the vibration motion induces rotations of the counter parts of the joints, also leading to stress in the latter. The vibration motion can also make the normal stress vary around the initial load of the joints. Certain configurations (h, g, c, j) avoid this coupling between vibration motion and normal stresses. Others configurations (d, e) limit the coupling whereas the simplest configurations (a, b) can generate significant coupling. This coupling makes the experiments hard to perform due to poor control of the normal load.

Each of these experimental configurations had been tested with a specific excitation device and excitation signals. Several experimental methods can be used to highlight non-linear effects such as amplitude-dependent natural frequencies and damping, which are very commonplace for friction dampers. Many works have been based on steady-state analysis in order to build Frequency Response Functions (FRF), [23,2,13] to estimate EL through the modal damping ratio. EL can also be estimated through quasi-static analysis [23,17,14]. This experimental procedure is very close to the procedure performed with the Dynamic Mechanical Analyzer (DMA) for viscoelastic property identification. Transient analyses are also frequently used: the classical approach is to excite the structure with an impact hammer, [32,8]. A more original approach is to obtain a free-decay response by disconnecting the sine-excitation device from the structure since a steady-state response very close to the modal response is obtained, [15,33]. This procedure is called stop-sine in the present paper.

Several methods are used in order to post-process the tests and identify the parameters of the specimen tested. For steady-state tests, FRF and Force-displacement maps are used to identify the damping, using the frequency bandwidth around the resonance frequency. The logarithmic decrement method is used on time-signals to evaluate amplitude-dependent damping during transient tests while time-frequency maps obtained with spectrogram or wavelet [1,15,34,36] are commonly used to evaluate amplitude-dependent frequencies and damping.

## 1.2. Purpose

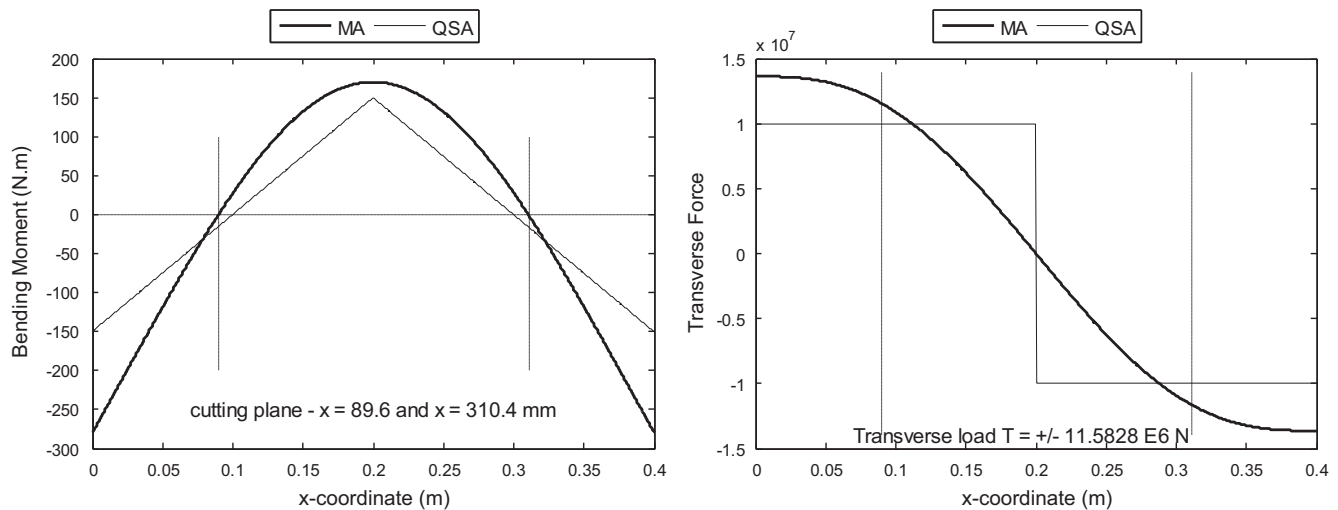
The present work starts from the idea of a previous paper, [20], Fig. 1j. Firstly, the shape of the beam has been improved in order to obtain the greatest damping possible, by increasing the dimensions of the interfaces, see Peyret et al. [4]. Moreover, the shape has been designed to avoid coupling between the normal stresses and the vibration motion even in the case where the interfaces are located imprecisely. Secondly, the testing device is presented: piezoelectric transducers have been glued in order to excite the first vibration mode; sensors are used to obtain the normal load in the interfaces and measure the transverse motion. Thirdly, an original experimental procedure is proposed for stop-sine measurements. The authors justify that their excitation method is more efficient than Dirac (shock) or Heaviside (release of a static load) excitations. Signal processing tools are proposed for post-processing the instantaneous damping and frequency of the first mode of the structure. Finally, this paper demonstrates the presence of micro-slip damping experimentally, by comparing the vibration behavior of a monolithic part and a built-up structure with friction-joints. The results are then discussed and compared to the simulations provided by the theoretical model.

## 2. Design of the experimental device

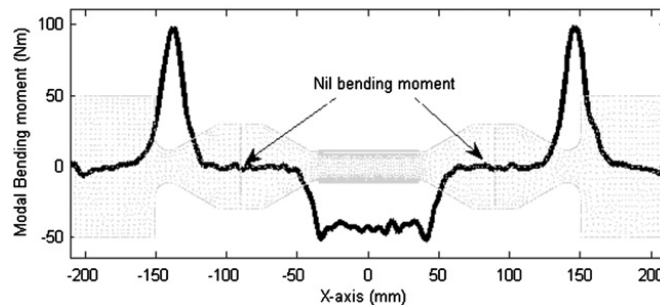
### 2.1. Design of the experimental device

The principle of the experimental device (Fig. 1j) was justified in previous works, see [20,4]: it is a clamped-clamped beam excited on its first bending mode. The beam is built up with three parts linked by two planar joints. A normal pre-load  $N$  is applied on both extremities of the beam before there are clamped to the ground. The three parts remain in contact even during the bending motion due to the normal pre-load  $N$  and the friction between the counter-parts. This design allows avoiding coupling between pre-load induced normal stresses in the planar joints and the vibration-induced shear stresses due to the zero bending moment at the location of the joints, see Fig. 2. In the previous paper [20], the beam was studied under a quasi-static assumption (QSA), i.e. the normal and shear stresses were computed using the definition of the static bending moment when the beam was loaded with a centered transverse load. A more recent work showed that QSA leads to errors in defining the zero-bending-moment section and for the amplitude of the transverse load in this section. By using the definition of the first bending mode (MA), the bending moment is equal to zero in the cross sections located at  $x=89.6\%$  of  $L/4$ , see Fig. 2. Moreover the transverse load is 20% higher for MA than for QSA. By improving the shape of the beam, it is possible to define the position of the cutting section which leads to a zero bending moment. This section has to be well placed even if the experimental mode shape is slightly different from the theoretical one due to machining errors. The constant section over the length of the beam does not allow obtaining this robustness. The difference between MA and QSA illustrates this lack of robustness in the design well.

The beam has to be as thick as possible in order to maximize the damping of the structure, see Peyret et al. [4]. Machining errors can lead to badly positioned cutting-sections and therefore to coupling between the normal load and the



**Fig. 2.** Bending moment (left) and transverse force (right) belonging to the cross sections of the beam studied. The dashed lines indicate the cutting planes located at  $x=100$  and  $300$  mm under the quasi-static assumption and at  $x=89.6$  mm and  $310.4$  mm under the modal assumption. These results were obtained considering the geometry defined in Fig. 1j defined in Ref. [20] and Timoshenko assumption.



**Fig. 3.** Bending moment plotted over the beam length. Particular attention should be given to the width of the zero moment zone which makes the device robust to machining errors.

vibration motion. In order to ensure robustness in the face of machining errors, the authors propose a design that allows obtaining a nil bending moment over a non-zero length (see Fig. 3). In order to obtain uniformly distributed normal stress over the cutting plane, the thickness of the beam changes smoothly over its length. Finally, particular attention was given to obtaining the highest frequency for the second bending mode in order to avoid coupling between the first two modes. All these design constraints led the authors to define the geometry of Fig. 5: the plane of the beam is symmetrical; it has two clamped blocks (see Figs. 1–6) and two interface areas (see Figs. 2–4). The blocks around the two interface zones are designed to maximize the width of the zone where the bending moment is nil, see Fig. 3.

The dimensions and the references of the materials used to make the specimen are provided below.

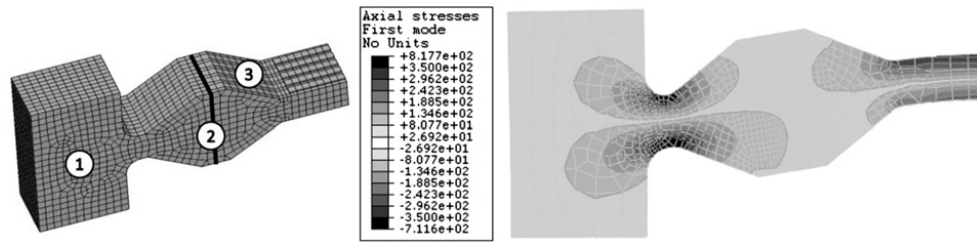
**Material:** Steel C35: Young modulus=220 GPa, Poisson Coef.=0.3.

## 2.2. Instrumentation of the experimental benchmark

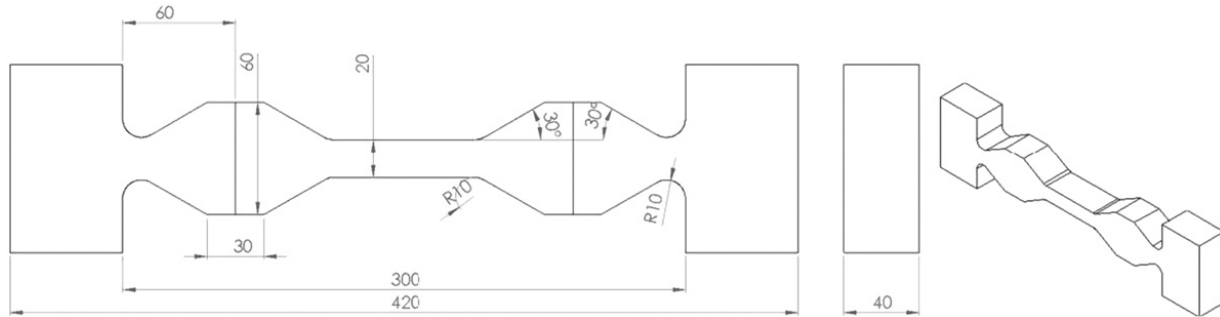
Before the first measurement, a normal pre-load is applied using a quick clamp, see Figs. 4–6. Then the beam is clamped on a Steel Surface Plate using a screwed connection (Figs. 1–6); the diameter of the screw holes allows maintaining the normal load. The level of the normal load is measured by strain gauges placed on both sides of the beam (Figs. 2–6). The normal load is assumed to remain static. Dynamic measurements of this load exhibit dynamic coupling with the transverse load which was close to 1% of the nominal load.

Excitation is done using either an impact hammer or piezoelectric patches, see Fig. 6. The piezoelectric patches are glued on both sides of the beam in opposite polarization in order to obtain opposing effects on both sides. Consequently, they are in extension on one side, whereas they are in compression on the other side. Due to this effect, the patches generate a moment centered in the middle of the beam. This moment is very efficient for exciting the first bending mode of the beam. Moreover, the excitation is very easy to stop in order to perform the stopped-sine tests. To do this a switch is incorporated in the electrical circuit and simply needs to be opened to stop the excitation. Of all the methods tested, the stopped-sine performed with piezoelectric patches was the most accurate for the damping measurements. This is an important item of this work.

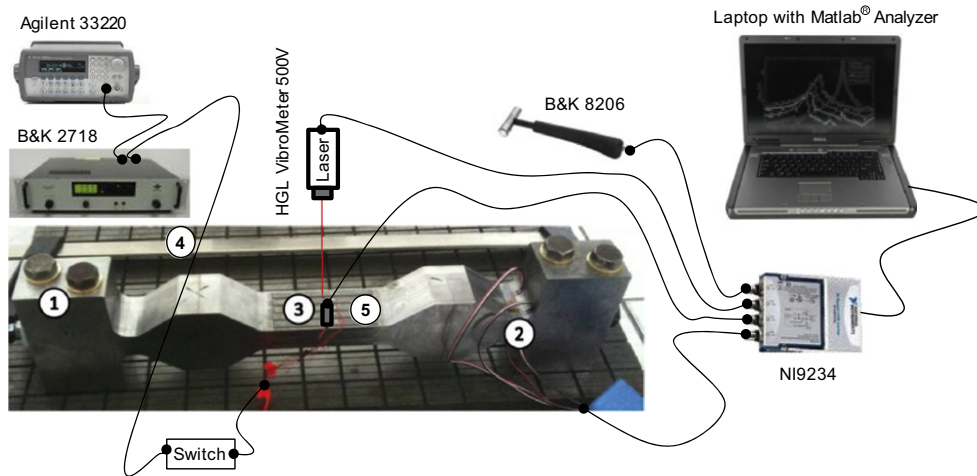




**Fig. 4.** Left: New design, 3D view of half of the beam. The clamp is located on Volume 1. Volume 2 is cut in order to make the joint. Volume 3 has been designed to ensure the normal stresses are uniformly distributed. Right: Normal stress distribution under the first mode shaped prescribed displacement. The normal stresses are zero in the neighborhood of the cutting plane.



**Fig. 5.** Geometry of the specimen.



**Fig. 6.** View of the test bench screwed on its Steel Surface Plate. 1 A massive part designed to clamp the beam on the heavy Steel Surface Plate. 2 The strain gauges glued on both sides of the beam to measure the normal load. 3 The piezoelectric patches glued on both sides of the beam to excite the first vibration mode. 4 A quick clamp used to apply the normal load before the tests. 5 the Bruel and Kjaer 4517 miniature accelerometer.

In order to measure the transverse displacement, an accelerometer and a laser-velocimeter were used. The former is more accurate but its wire and mass could modify the behavior of the structure. The latter is less sensitive to environmental noise but there is no contact between the sensor and the structure, thus it does not modify its behavior.

To quantify the influence of the accelerometer and its cable on the dynamic behavior of the beam, tests were conducted by varying the mass of the accelerometer and with and without cable. These tests showed that the extra mass of the accelerometer and its cable do not alter the mean behavior of the beam.

### 3. Measurements techniques and experimental results

#### 3.1. Excitation and measurement technique

During testing, free and enforced dynamic responses of the clamped–clamped beam were obtained. The first bending mode of the beam was studied with several normal loads and several levels of excitation.

For the forced dynamic experiments, the beam was excited by piezoelectric patches located at the center and both sides of the beam (Fig. 6). The excitation signals were sine functions inside the frequency bandwidth studied.

For the free dynamic experiments, three excitation techniques were used. The first used an impact hammer. The second one was performed with a preload rope, then the rope was cut in order to perform a Heaviside excitation. The third was performed by stopping a sinusoidal excitation close to the frequency of the first bending mode.

These four kinds of excitation are compared in the time–frequency domain in Fig. 7.

In shock excitations, all the energy falls at the same time and for all frequencies of the bandwidth studied. The shock exhibits all the natural modes in the same time. This excitation is useful for linear structures. However, for non-linear ones, the dynamic response strongly depends on shock levels and structural modes and cannot be considered as the superposition of the dynamic response of each natural mode.

The second kind of excitation is sweep sine. The instantaneous frequency increases versus time. The dynamic response is assumed to be a steady state solution for each frequency. For weakly damped natural modes, the main difficulty consists in choosing a very slow frequency evolution for the sweep sine in order to avoid modulations between natural frequencies and excitation frequencies, see for example [18]. This test can take a long time for several levels of excitation and lead to changes in the system during the test.

The third excitation is a Heaviside function. This function gives more energy for the lowest frequencies than for the highest frequencies. For a Heaviside excitation, a rope is tied tightly to the middle of the beam, providing static deflection near the first mode shape of the beam. The initial condition obtained with the static deflection and the nature of the excitation lead to a dynamic response mainly composed of the first natural frequency. However, several experimental results reveal high-frequency modes.

The most accurate excitation in the context of our study is a stopped-sine, tuned near the natural frequency studied which is first detected with shocks and sweep-sine excitation. When the sine is stopped, the structure continues its dynamic response, composed only of the natural mode studied. This property is significant and allows studying non-linear

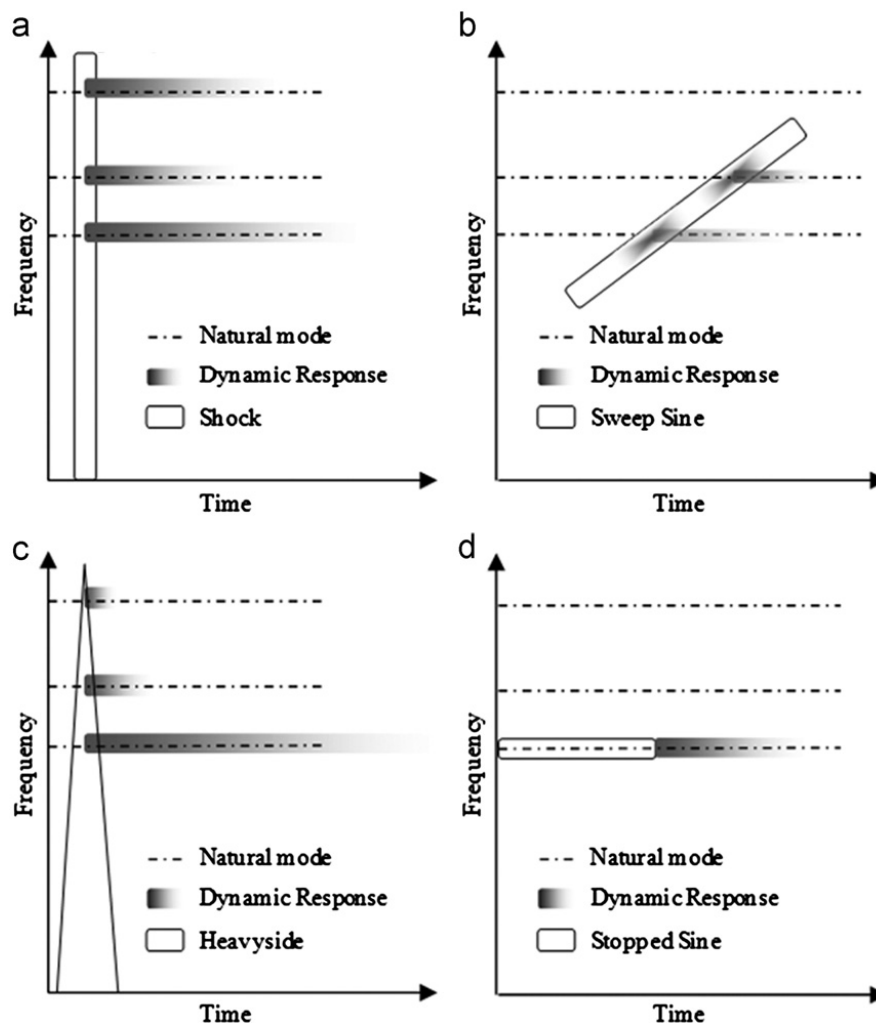


Fig. 7. Sketch of time–frequency plots of the excitation and dynamic response of linear structures for shocks, sweep-sine, heavyside, stopped-sine types of excitation.



dynamics with accuracy. Decreasing magnitude is used to study non-linear damping, by assuming that the damping depends on the magnitude of displacement.

The sweep-sine and stopped-sine excitations are performed with piezoelectric patches located in the middle of the beam (Fig. 6). Measurements were performed with an accelerometer and a laser at various points of the beams (Fig. 6).

### 3.2. Reference measurements

In order to validate the design of the structure studied, especially concerning the mode shape and the positions of the cutting planes, the authors performed an experimental modal analysis of the monolithic beam before machining the cutting planes. To obtain the first mode shape of the beam, FRF were built between the signal of a force sensor of the impact hammer and the signal of a Laser Vibrometer, see Fig. 6. The shocks were applied to the center of the beam and the laser spot was moved along the beam at twelve different points. After data processing and the construction of the transfer functions, we obtained Fig. 8 which shows a natural frequency at 960 Hz.

The amplitude of the mode shape was then reconstructed and compared to the data obtained by simulation, see Fig. 9. The numerical and experimental mode shape were found to be very well correlated as expected for this academic testbench. This result makes the authors very confident for the placement of the cutting planes.

### 3.3. Shock analysis

Only the results of the tests performed with shocks and stopped sine are presented in this paper. The other tests obtained with sweep sine and Heaviside produced less interesting results. For the shock analysis, FRF were computed between the hammer-sensor and the accelerometer. The shock was carried out close to the middle of the beam and the accelerometer was co-localized. The same tests were performed for the reference beam and for the cut beam under several normal loads. Fig. 10 shows the Transfer functions for the monolithic beam and for the cut beam.

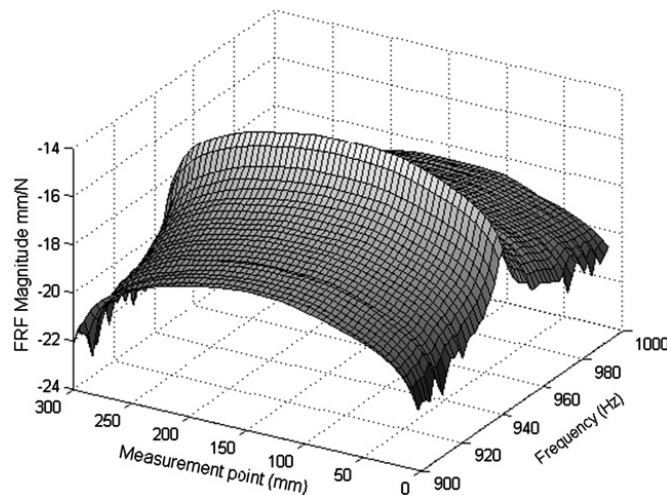


Fig. 8. FRF obtained for impact excitation applied to the center of the beam and laser measures in twelve different points.

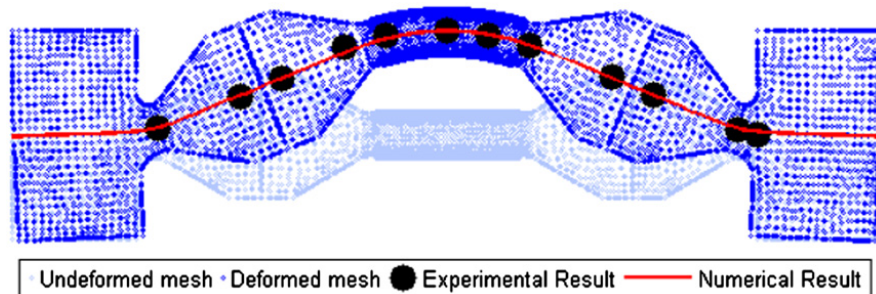
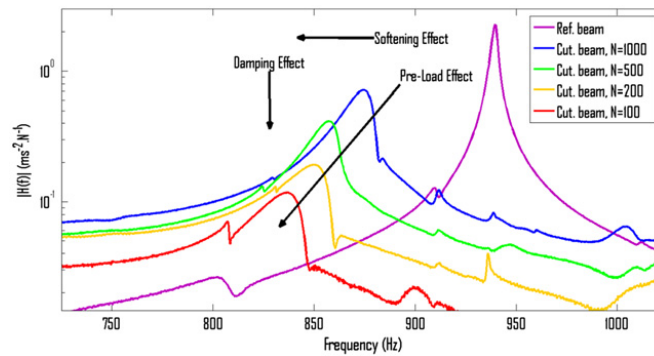
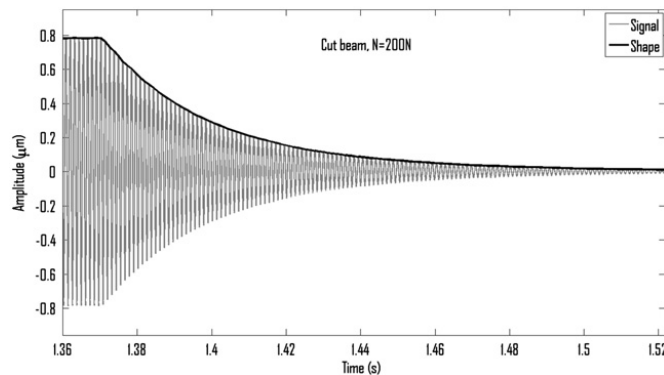


Fig. 9. Comparison of the first mode shapes obtained with Finite Element Computations and Experimental Data. Both results are superposed on the neutral axis.



**Fig. 10.** Transfer functions between the accelerometer and the impact hammer sensor. Both the monolithic (ref. beam) and the cut beam were tested. The latter was tested under four normal load levels in the range 100–1000 N.



**Fig. 11.** Temporal signal and shape curve measured with the accelerometer and integrated over time twice to obtain displacement under a 200 N normal load.

As the normal load does not modify the dynamic response of the reference beam, it is not presented as a parameter here. However, the dynamic response of the cut beam is studied with normal loads set at 100 N, 200 N, 500 N and 1000 N.

- The softening effect of the interfaces: the first natural mode of the reference beam is close to 940 Hz and decreases to 837 Hz for a low normal load (100 N). This 10% decrease of the frequency corresponds to a 20% decrease of modal stiffness, assuming that the mode shape does not depends on the normal load.
- The non-linear effect of the interfaces: the first natural bending mode of the reference beam is symmetric in the frequency domain observed on the Transfer Function curve, whereas this mode is not symmetric on the Transfer Function for the cut beam whatever the normal load. The natural frequency decreases slowly as the magnitude increases, leading to an asymmetric mode on the Transfer Function. This non-linear effect of the interface is not developed in this paper which mainly focuses on the damping study.
- The damping-effect of the interface and the normal load. The modal damping of the reference beam is close to 0.3%. The measurements performed on the cut beam highlight a significant evolution of the damping versus normal load: the damping increases as the normal load decreases. The modal damping is lower than 1% for 1000 N and greater than 5% for 100 N.

### 3.4. Stopped sine analysis

Due to the low damping of the beam, its measurement was performed in the time domain for reasons of accuracy and in order to study the evolution of the damping versus amplitude. Moreover, in order to simplify post-processing techniques and, once again for reasons accuracy, the “stopped sine” excitation was generated with piezoelectric patches. The first step consisted in detecting the shape curve, see Fig. 11. This step could be performed with the magnitude of the analytic signal (computed with the Hilbert transform and the maxima detection). Both methods were computed and led to similar results.

The second step consisted in computing the logarithmic slope of the shape curve. This goal was achieved by computing the logarithmic decrement with a moving average on several maxima and by computing the moving average of the logarithmic magnitude of the Hilbert Transform. Unlike the first technique, this second method does not depend strongly on the oscillation number. These techniques show a non-linear damping: it decreases as the magnitude of the displacement decreases (See Fig. 12). This effect is obvious for the cut beam, however it could be observed on the

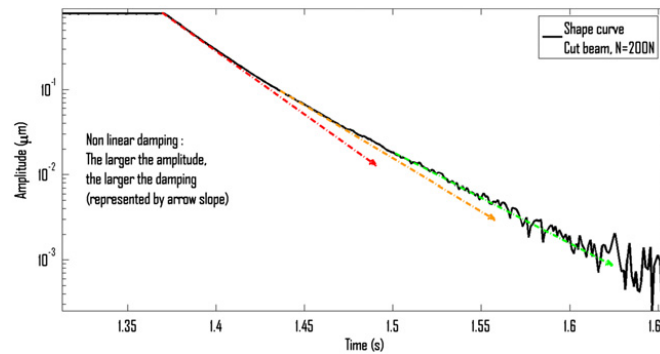


Fig. 12. Logarithmic evolution of the shape curve: the evolution should be linear for linear damping.

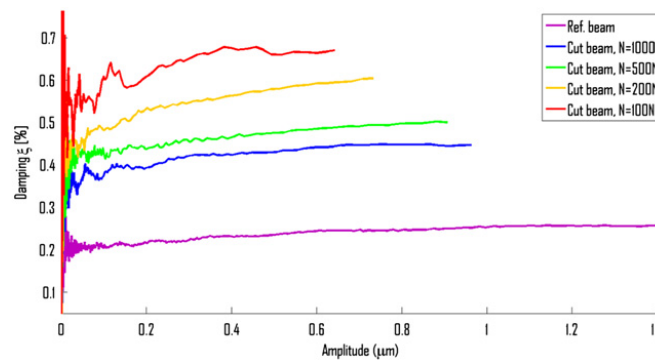


Fig. 13. Evolutions of damping versus the normal load and versus the displacement magnitude.

reference beam to a far lesser extent. The authors assumed that the fastening system of the reference beam produced the same effect as for the interfaces studied but at a smaller amplitude.

The computation of the slope of the shape curve led to instantaneous damping. The damping is assumed to be dependent on the magnitude of displacement. Fig. 13 represents the evolution of the modal damping of the first bending mode versus the displacement magnitude for the reference beam and for the cut beam loaded with four different normal loads.

These curves highlight:

- The non-linear effect of the interfaces on damping: the damping depends on the displacement amplitude and the normal load.
- The increase of the damping with the decrease of the normal load. This effect with shock excitations has been shown previously.
- The increase of the damping with the increase of the displacement amplitude. The interfaces of the cut beam dissipated increasing energy when the displacement increased.

#### 4. Conclusion

Unlike other kinds of experiments studied in the references, the device proposed by the authors is designed to determine damping at interfaces with known and controlled loads. However, although the load is controlled, the normal stress distribution at the interface depends on the real contact area and above all on the flatness. In order to minimize these defects, especial attention was paid to the machining of the beam. Cutting into three parts was done by wire-cut EDM (Electric Discharge Machining). The original design of this experimental device provides non-linear damping due to micro-slipping at the interface and allows uncoupling static and dynamic loads.

This work required the development of an accurate method for measuring nonlinear damping. Firstly, the authors compared several types of excitation. The stopped-sine excitation was shown to be most efficient for this study as it allows obtaining a single frequency response and studying nonlinear modes with frequency and natural magnitude modulations without other mode couplings.

The excitation was obtained with piezoelectric patches glued on both sides of the structure. This device allows instantaneously disconnecting the excitation without any variation of mechanical impedance, as is observed with electrodynamic shakers. After interrupting the power at any time, the kinematic initial conditions were collinear to the first bending mode studied. Thus the device vibrated in free conditions only in the frequency of the mode, with a slow

decrease of magnitude. The use of piezoelectric patches is fundamental to the success of the stopped-sine excitation method. The main area for improvement of our device is to make the piezoelectric patches capable of taking into account more displacements.

Despite its academic form, which differs from that of a bolted assembly, this bench reproduces the loading conditions of an assembly under constant normal load. Indeed, comparison of the reference beam and the cut beam allows separating the damping due to the interfaces from the damping induced by other sources, especially the damping due to the contact surfaces of the clamps. Experimentally, frequency and loss factor evolutions between the monolithic beam and the cut beam conform to the model tendencies. The experimental damping coefficient was measured between 0.35% and 0.7% for several normal loads. This damping coefficient corresponds to a loss factor between 0.7% and 1.4% which are the theoretical levels provided by the model, see [20]. This new device and the results obtained can therefore serve as a reference for researchers who wish to develop methods for predicting damping in joints.

Finally, we suggest using this design and the experimental tools that have been developed to characterize the micro-sliding and the damping induced. Therefore the shape can be used to define specimens of several materials, roughnesses and flatnesses, with or without coating, in order obtain a library of behaviors for use in the design of jointed structures.

## References

- [1] P. Argoul, T.P. Le, Instantaneous indicators of structural behaviour based on continuous Cauchy wavelet transform, *Mech. Syst. Signal Process.* 17 (2003) 243–250.
- [2] C. Beards, J. Williams, The damping of structural vibration by rotational slip in joints, *J. Sound Vib.* 53 (3) (1977) 333–340.
- [3] M. Berthillier, C. Dupont, R. Mondal, J. Barrau, Blades forced response analysis with friction dampers, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.* 120 (1998) 468–474.
- [4] N. Peyret, J.L. Dion, G. Chevallier, P. Argoul, Non linear dynamic behavior modelling of a planar friction interface in a structure assembly, in: *Proceedings of IDETC ASME*, 2009.
- [5] G. Chevallier, F. Macewko, F. Robbe-Valloire, Dynamic friction evolution during transient sliding, in: *Transient Processes in Tribology, Proceedings of the 30th Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, vol. 43, 2003, pp. 537–543.
- [6] T. Pian, Structural damping of simple built-up beam with riveted joints in bending, *Am. Soc. Mech. Eng. Appl. Mech. Div.* 24 (1957) 35–38.
- [7] O. Poudou, C. Pierre, Blades forced response analysis with friction dampers, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 2007.
- [8] Y. Ren, C. Beards, Identification of joint properties of a structure using frf data, *J. Sound Vib.* 186 (4) (1995) 567–587.
- [9] E.E. Ungar, The status of engineering knowledge concerning the damping of built up structure, *J. Sound Vib.* 26 (1) (1973) 141–154.
- [10] W. Whiteman, A. Ferri, Displacement-dependent dry friction damping of a beam-lyke structure, *J. Sound Vib.* 198 (3) (1996) 313–329.
- [13] J. Esteban, C.A. Rogers, Energy dissipation through joints: theory and experiments, *Comput. Struct.* 75 (2000) 347–359.
- [14] L. Goodman, J. Klumpp, Analysis of slip damping with reference to turbine-blade vibration, *Am. Soc. Mech. Eng. Appl. Mech. Div.* 8 (1956) 1–30.
- [15] L. Heller, Damping in assemblies structures, Ph.D. Thesis, Université de Franche-Comte, 2005.
- [16] I. Korkmaz, J.J. Barrau, M. Berthillier, S. Creze, Experimental dynamic analysis of cantilever beam damped by a dry friction damper, *Mec. Ind. Mater.* 46 (3) (1993) 145–149.
- [17] A. Metherell, S. Diller, Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint-uniform clamping pressure, *Am. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech.* 35 (1968) 123–128.
- [18] J.-L. Dion, I. Tawfiq, G. Chevallier, Harmonic component detection: optimized spectral kurtosis for operational modal analysis, *Mech. Syst. Signal Process.* 26 (2012) 24–33.
- [19] B.K. Nanda, A.K. Behera, Study on damping in layered and jointed structures with uniform pressure distribution at the interfaces, *J. Sound Vib.* 226 (4) (1999) 607–624.
- [20] N. Peyret, J.L. Dion, G. Chevallier, P. Argoul, Micro slip Induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress, *Int. J. Appl. Mech.* 2 (2) (2010) 281–304.
- [23] H. Ahmadian, H. Jalali, Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures, *Mech. Syst. Signal Process.* 21 (2) (2007) 1041–1050.
- [30] L. Gaul, Friction control for vibration suppression, *Mech. Syst. Signal Process.* 14 (2) (2000) 139–150.
- [31] B.K. Nanda, Study of the effect of bolt diameter and washer on damping in layered and jointed structures, *J. Sound Vib.* 290 (3–5) (2006) 1290–1314.
- [32] Y. Ren, C.F. Beards, Identification of joint properties of a structure using frf data, *J. Sound Vib.* 4 (186) (1995) 567–587.
- [33] Y. Song, Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements, *J. Sound Vib.* 273 (1–2) (2004) 249–276.
- [34] L. Heller, E. Foltête, J. Piranda, Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures, *J. Sound Vib.* 327 (1–2) (2009) 183–196.
- [35] M. Masuko, Y. Ito, K. Yoshida, Theoretical analysis for a damping ratio of a jointed cantilever, *Bull. JSME* 16 (1973) 1421–1432.
- [36] H. Nouri, et al., Experimental characterization and modeling of microsliding on a small cantilever quartz beam, *J. Sound Vib.* 317 (1–2) (2008) 30–49.
- [37] J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson, Contact of nominally flat surfaces, *Proc. R. Soc. A* 295 (1966) 300–319.
- [38] H. Goyder, P. Ind, D. Brown, Development of a method for measuring damping in bolted joints, in: *Proceedings of the IDETC ASME*, 2011.



## MICRO-SLIP INDUCED DAMPING IN PLANAR CONTACT UNDER CONSTANT AND UNIFORM NORMAL STRESS

N. PEYRET,<sup>\*</sup> J.-L. DION,<sup>†</sup> G. CHEVALLIER<sup>†,‡</sup> and P. ARGOUL<sup>\*</sup>

*<sup>\*</sup>Université Paris-Est, UR Navier  
Ecole des Ponts ParisTech  
6–8 av. Blaise Pascal Cité Descartes  
Champs-sur-Marne  
77455 Marne-la-Vallée, France*

*<sup>†</sup>Supmeca, 3 rue Fernand Hainaut  
93407 Saint-Ouen Cedex, France  
<sup>‡</sup>[gael.chevallier@supmeca.fr](mailto:gael.chevallier@supmeca.fr)*

Received 10 April 2009

Accepted 24 November 2009

The friction between interfaces at bolted joints plays a major role in the damping of structures. This paper deals with the energy losses caused by micro-slips in the joints. The aim of this study is to define in an analytical way these energy dissipation mechanisms which we examine through the analysis of a new benchmark: the flexural vibration of a clamped-clamped beam with original positioning of the interfaces. The joints exhibit the behavior of an interface under constant and uniform normal stress. The stress and strain values are computed at the joints under the assumption of quasi-static motion. This model allows us to understand the evolution of the slip and stick regions along the joint interfaces during the loading process. The expressions of the strain and stress fields during each phase of the loading process are derived. These lead to the quantification of the dissipated energy within the interface. Using this formula, a nonlinear loss factor can then be computed. In the final part of the paper, the dynamic response of the beam is calculated using this nonlinear loss factor.

*Keywords:* Damping; friction; contact; assembly; vibration.

### 1. Introduction

In the analysis of the vibration of structure assemblies, the problem of damping remains the biggest challenge. Simulation tools (Computer Aided Design and Finite Element Method) are currently being used to predict the mass and stiffness matrices with precision. It is then possible to update the model in order to improve the accuracy of the stiffness terms. Damping is traditionally affected by an error which can sometimes exceed 100% and consequently updating the models often remains difficult. The automotive or aerospace sectors are directly affected by these problems, be it in the behavior of car chassis or space launchers. Interfaces (welded points, bolted joints or rivets) influence the dynamics of these structures, specifically in the prediction of the vibration levels.



Several studies were carried out to understand and define the mechanism of energy losses (EL) in the assemblies. These studies can be divided into two groups according to the mechanisms of dissipation they demonstrate: macro-slipping or micro-slipping. In one group, damping comes from the macro-slipping (macroscopic relative displacement) between the structure and an element located outside the structure [Berthillier *et al.*, 1998; Whiteman and Ferri, 1996; Poudou and Pierre, 2007; Korkmaz *et al.*, 1993]. The modeling of the friction is made through an external force, using for example the Coulomb model. In the second group, the damping comes from micro-slips (no relative displacement) between the parts of the structure itself through internal joints. The most famous benchmarks are: clamped beams with a longitudinal interface [Goodman and Klumpp, 1956] (see Fig. 1(b)), sandwich beams loaded with a pure transverse force [Metherell and Diller, 1968] (see Fig. 1(c)) or lap joints [Earles, 1966], beam elements screwed together [Esteban and Rogers, 2000] (see Fig. 1(a)), and truss structures with rotational slips in joints [Beards and Williams, 1977].

Many expert authors [Goodman and Klumpp, 1956; Beards and Williams, 1977; Pian, 1957; Ungar, 1973], noted from results of various experiments that, in structure assemblies, the damping value is much greater than the inherent damping value of the material. This damping comes from the EL caused by micro-slips. There are several experimental ways to estimate the value of this damping. First, a Loss Factor (LF) can be defined as the ratio of the dissipated energy to the maximum strain energy computed over a cycle in quasi-static conditions [Metherell and Diller, 1968; Pian, 1957]. It is also possible to estimate the EL, through the modal damping ratio, by analyzing the experimental Frequency Response Functions (FRF), see for example [Beards and Williams, 1977; Ren and Beards, 1995] in the frequency domain. In time domain, the modal damping ratio can be identified using the logarithmic decrement [Nanda and Behera, 1999]. Time signals can also be processed using Time–Frequency Transforms when several frequencies or nonlinear behaviors are taken into account [Argoul and Le, 2003].

To model the EL in structural dynamic applications, the classical approaches are to use viscous damping [Ahmadian and Jalali, 2007], or structural damping [Esteban and Rogers, 2000; Ren and Beards, 1995] which has alternative names such as linear hysteretic damping, material damping, complex stiffness, and internal damping. The main difference between both approaches is that viscous damping induces artificial frequency dependence. Therefore, in this study, the damping is modeled as a structural one. Moreover, Berthillier *et al.*, [1998] and Nanda and Behera [1999] identified an LF strongly dependent on the amplitude of the load. This dependence induces nonlinear effects. To model hysteretic behavior, the ELs are computed by using the Amontons–Coulomb law for the finite element models Benedetti *et al.*, [2007]. For the lumped models, the Dahl or the Iwan Models are frequently used, see Oldfield *et al.*, [2005].

There are several approaches to evaluate the EL. Most authors favor a continuous description of the joint, see Metherell and Diller [1968], Pian [1957], Nanda and Behera [1999], Chen and Deng [2005] as examples. The dissipated energy is nil when the surfaces stick and is positive when the surfaces partially slide. The transition from the sticking position to the moment when the body begins to slip depends on the normal stress between the two contacting surfaces. In assemblies, normal stresses are time-dependent and space-dependent. Previous works have distinguished the cases in which normal stresses are:

- Constant (time-independent) and uniformly distributed (space-independent) [Metherell and Diller, 1968; Pian, 1957; Nanda and Behera, 1999].
- Constant and nonuniformly distributed [Poudou and Pierre, 2007; Caignot *et al.*, 2007; Heller, 2005].
- Nonconstant and nonuniformly distributed (computed with discrete models), see Yang *et al.*, [1998] as an example.

To obtain and to solve the model equations with constant and uniformly distributed normal stresses, several authors used an analytical or a semi-analytical approach. The aim is to determine a parametric function of damping, see Whiteman and Ferri [1966], Nanda and Behera [1999]. When the normal stress is nonuniformly distributed, the authors used the Finite Element Method (FEM) [Chen and Deng, 2005; Caignot *et al.*, 2007; Heller, 2005]. The FEM computation codes include the contact between the parts [Ren and Beards, 1995] and allow more complex shapes to be taken into account. However, this kind of simulation presents two difficulties. First, it requires a very fine mesh of the contact area, which may lead to a high number of degrees of freedom in the modeling of the contact but is not convenient for modeling vibration. Second, the time increment must be sufficiently small to ensure the convergence of the algorithm which leads in turn to a large number of iterations. As a result, the FEM simulation of an assembly structure often demands unreasonable computational time. Currently, research is being conducted to divide the structure into substructures to facilitate the computations [Caignot *et al.*, 2007; Heller, 2005].

Our purpose is to quantify the damping induced by micro-sliding in joints. A new assembly test is introduced for which the dissipation mechanisms are very similar to those observed in bolted joints. In the benchmarks suggested by Goodman and Klumpp [1956] and Metherell and Diller [1968] and illustrated in Figs. 1(a) and 1(b), respectively, it is experimentally difficult to ensure uniformly distributed normal stress and it is practically impossible to manage the normal load applied to the joints. Although the structure of our benchmark is traditionally used (clamped-clamped beam), to the best of our knowledge, the positioning of the connections has never been carried out before, but is representative of the traditional assemblies in mechanical technology. The normal stress is uniformly distributed and its amplitude



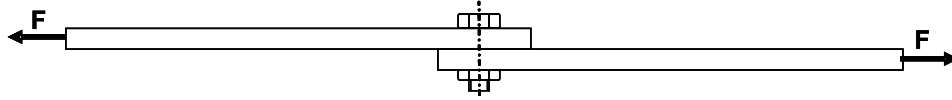
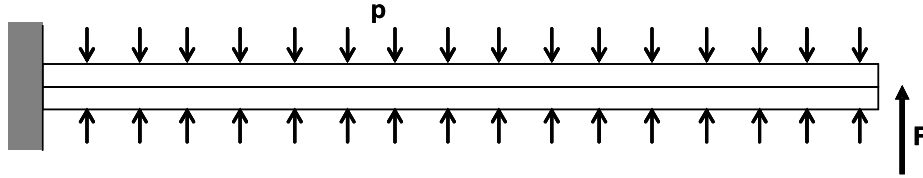
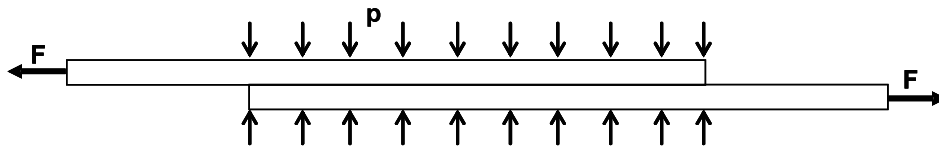
(a) A bolted structure — A free-free beam with a lap joint subjected to an axial load  $F$ (b) A press-fit joint subjected to a clamping pressure  $p$  and a vertical shear load  $F$ (c) A lap-shear joint subjected to a clamping pressure  $p$  and an axial load  $F$ 

Fig. 1. Different kinds of benchmarks.

can be easily managed and the shear stress is nonconstant. Finally, the geometry of the beam can be optimized in order to maximize the EL [Peyret *et al.*, 2009].

The EL in the interfaces of the new benchmark are then quantified, assuming the total structure to be linear and modeling interfaces to be nonlinear. The obtained LF is nonlinearly dependent on the amplitude of the load.

In Sec. 2 of the paper, the benchmark will be presented. The computation of the stress and strain levels of the interfaces will be presented in Sec. 3. In Sec. 4, the LF will be determined. Numerical results are presented and discussed. Finally, the LF will be used to compute the dynamic response of the structure.

## 2. Presentation of the Benchmark

### 2.1. Justification for this test benchmark — Assumptions

The micro-sliding effect on the damping of a structure assembly is strongly linked to the vibration amplitude. Figure 2 on the left shows the result of a free-vibration simulation. Three phases can be distinguished. On the right, the micro-slips do not occur for the lowest values of displacement: the EL are equal to zero. On the left, from the sticking limit to the the sliding limit, the EL increase as the magnitude of the displacement increases. After the sliding, macro-slips occur but this phenomena is not modeled here. The damping induced by micro-sliding within an interface can be modeled as a function of strains (or displacements). Figure 2 on the right shows the evolution of the Loss Factor (LF) versus the displacement amplitude. Here the function is obtained from the computation of the displacement in the time domain.

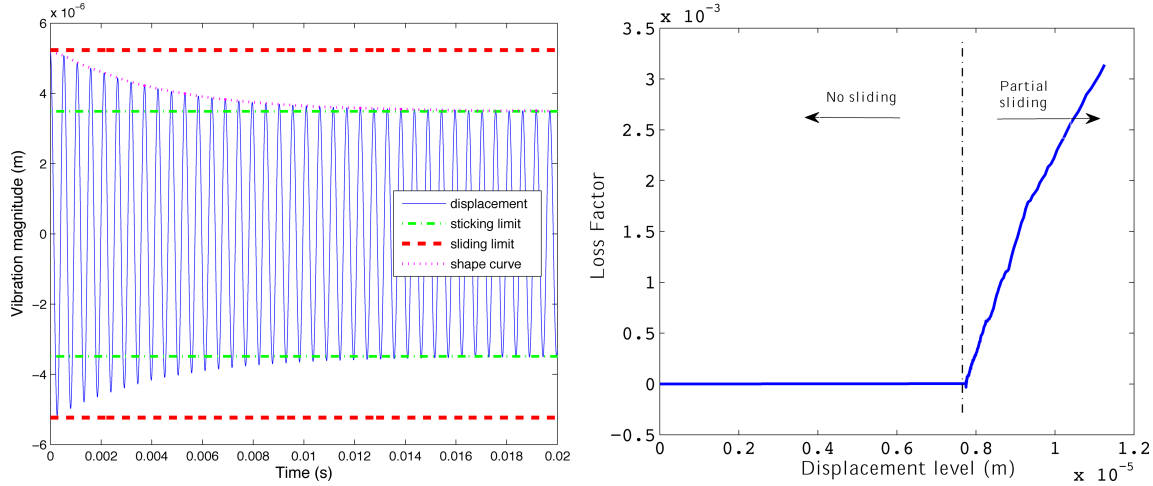


Fig. 2. Free vibration time response of a structure assembly — overview of the micro-slips effects — damping evolution versus the displacement-magnitude computed from the time-response.

It is recognized, as G. Amontons [1663–1705] and C.-A. Coulomb [1736–1806] showed experimentally, that friction does not depend strongly on the sliding speed (third Amontons–Coulomb law). Thus, it is assumed that the generated damping is independent of the frequency of vibration. The frequency of excitation is therefore without consequence and is not taken into account in our simulations.

This allows us to carry out a dynamic study of the proposed benchmark with a quasi-static approach. The proposed test bench is based on a comparison between a monolithic beam and the same beam which has been cut into three parts and therefore has two interfaces. The structural modifications generate two effects: a decrease of the natural frequency (variation of the stiffness) and an increase of the damping ratio (see Fig. 3). The main aim of the proposed experiment is to quantify the evolution of damping from the first studied case to the second. In the present numerical study, only the damping effect is modeled and quantified, as this is a suitable assumption in the case of planar contacts.

The benchmark is designed to ensure a uniform normal load, but due to the machining, some defaults can appear. The consequences of an imperfect flatness of the interface or of angular errors are computed using a Finite Element Code (see Fig. 4). These defaults should be very low to ensure the uniformity of the normal-stress along the interface.

## 2.2. Description of the studied structure

The benchmark is designed to simulate the joints of an assembly loaded with a constant and uniform normal load and with an harmonic transverse load. As a first step, we study the case of a “Monolithic” Beam (MB). This beam is clamped at both extremities. A transverse load  $2T$  is applied to the middle of the beam. It induces a simple bending of the beam. The study of the MB (see Fig. 5), shows that the

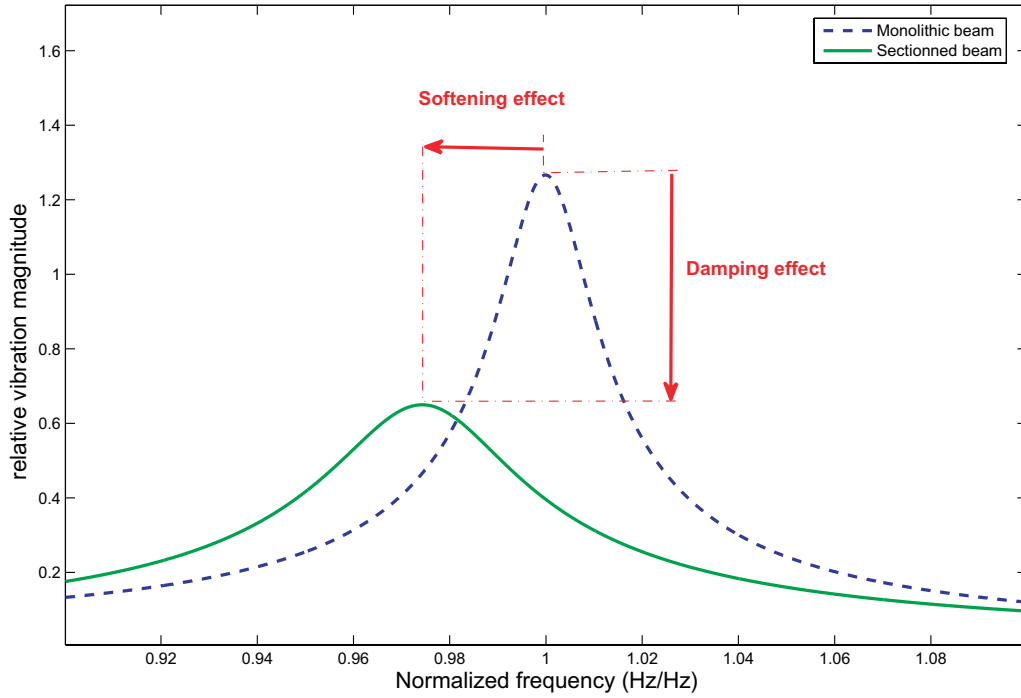


Fig. 3. View of the frequency response functions with and without EL.

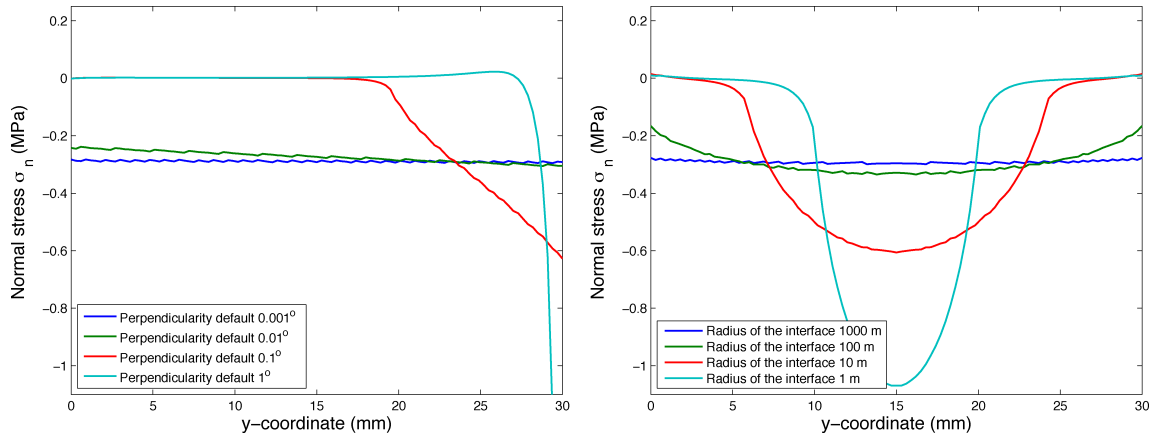


Fig. 4. Consequences of an angular error (left) and a flatness error (right) on the normal stress.

bending moment is equal to zero in the cross-section located at  $l/4$ , (see Fig. 5). Therefore, in this section, there are only shear stresses.

Then, a Sectioned Beam (SB), with the same geometry and the same boundary conditions, is studied. This structure is composed of three successive beams, with lengths  $l/4$ ,  $l/2$  and  $l/4$  (see Fig. 6). The beams are linked by two planar joints with contact and friction. The three parts remain linked with the help of an axial load  $N$  (see Fig. 6). This kind of assembly allows us to determine the conditions for the desired stresses in the interface at  $x = l/4$  and at  $x = 3l/4$ : constant normal

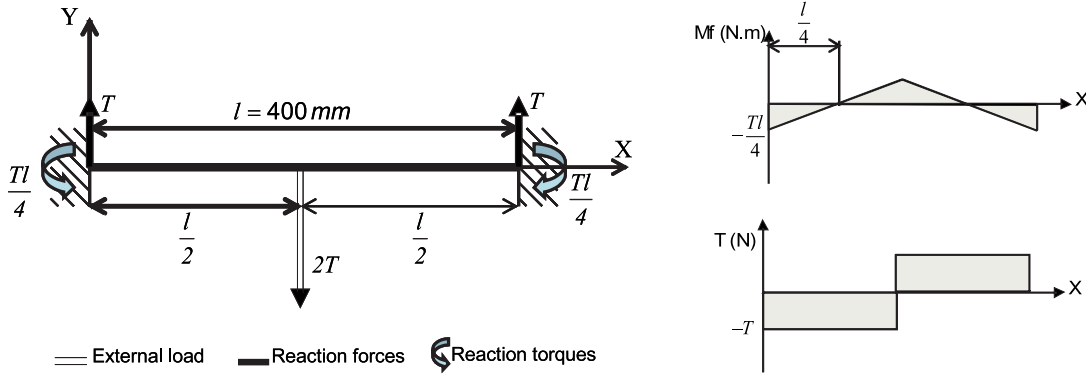


Fig. 5. Schema of the clamped-clamped beam loaded at its center — Shear load and bending moment diagrams.

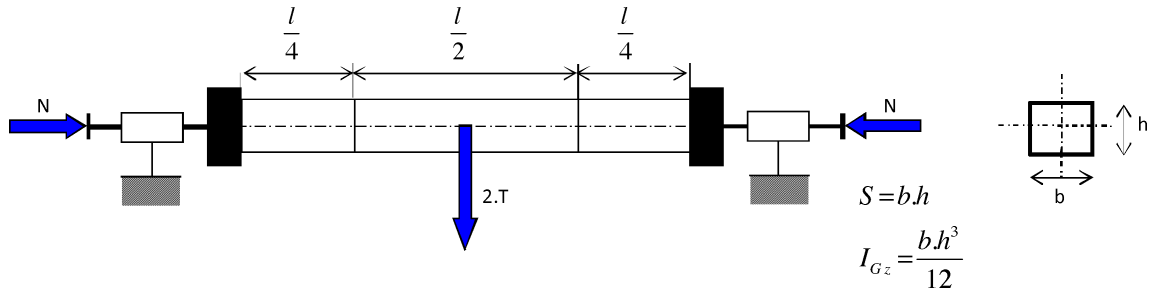


Fig. 6. Loadings of the Sectioned Beam (SB).

stress and nonconstant shear stress, respectively. This characteristic stress state in the joints is the strong point of the proposed benchmark.

This benchmark relies on several assumptions. First, it is assumed that the first mode of bending will be identified on the basis of a static deformation (Rayleigh–Ritz assumption) and all simulations will then be computed taking into account either a transverse load or a transverse displacement applied to the middle of the beam.

Second, the clamps are considered to be perfect (i.e., infinitely stiff and without friction). The experimental benchmark is designed in order to take into account the limits of the validity of this assumption. However, the modeling of the clamps can be updated by adding a finite stiffness instead of the infinitely stiff clamp. The consequence of updating the kinematic boundary conditions is the shifting of the cross-section for which the bending moment is nil. Thus, the future developments will not be affected by this assumption.

### 3. Modeling of the Interfaces

#### 3.1. Computation of the stress fields

In this section, the stresses are computed in the joints between the three parts of the SB: i.e., for the transverse section located at  $l/4$ . Two kinds of stress states are

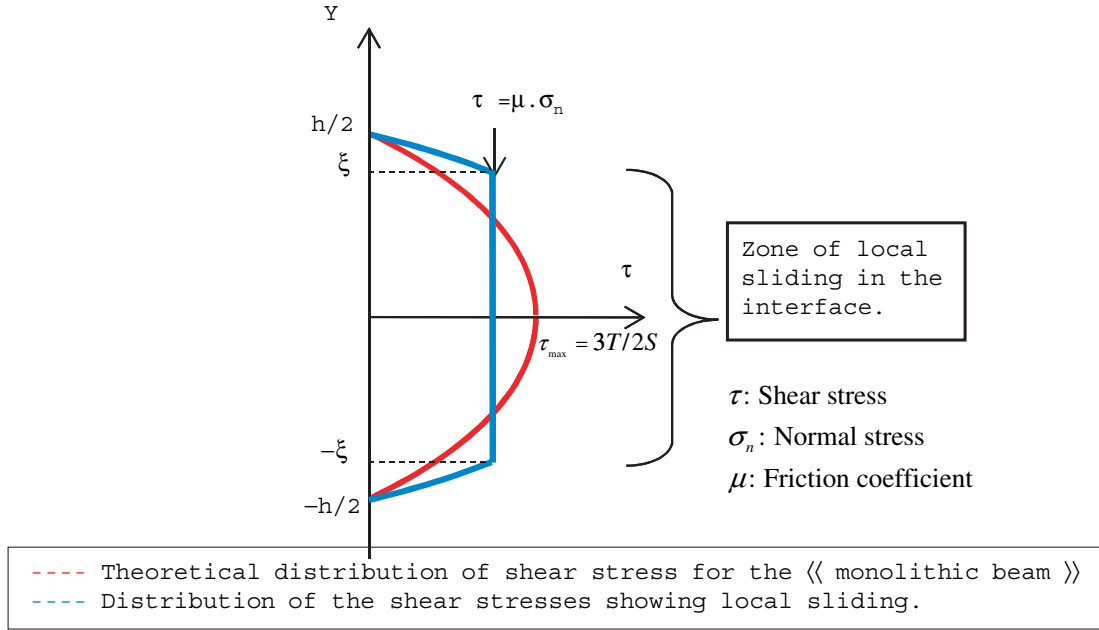


Fig. 7. Distribution of the shear stresses in the MB and in the SB.

then examined (see Fig. 7). First, when the stress value is lower than the friction stress value (equal to  $\mu\sigma_n$ ), the shear-stress field  $\tau$  is the same as in the MB. It is assumed to be parabolic (see Fig. 7). This assumption allows a continuous shear-stress field along the  $y$ -axis and the verification of the natural boundary conditions for  $y = h/2$ :

$$\tau = -\frac{T}{2I_{Gz}} y^2 + \frac{3}{2} \frac{T}{S} \quad (1)$$

Second, when the stress value becomes greater than the friction stress value, the shear-stress field is parabolic and bounded by  $\mu\sigma_n$ . The computation of the stresses is performed on the joint under a constant normal load. It is shown that, before the macro-sliding, there is a phase of partial slipping (PS), which corresponds to a sliding located in the middle of the interface. This sliding occurs without relative macroscopic motion between the different parts of the structure. In each interface, the load induces shear stresses that have a parabolic distribution as in the case of the MB. When PS occurs, there is a new distribution of shear stresses revealing the sliding zone (see Fig. 7). Incorporating the Coulomb model to define the sliding limit, a new distribution of stresses is analytically determined (see Fig. 7). This reveals a centered sliding zone that has a height of  $2\xi$  surrounded by two sticking zones. The parabolic distribution of shear stress in the sticking zones can be written as: for  $y \in [-\frac{h}{2}; -\xi] \cup [\xi; \frac{h}{2}]$

$$\tau = A y^2 + B \quad (2)$$

The constant distribution of shear stress in the sliding zone is given by: for  $y \in [-\xi; \xi]$

$$\tau = \mu\sigma_n \quad (3)$$

For a given transverse load, the boundary conditions are defined at  $y = h/2$  and at the limits of the sliding zone ( $y = \xi$ ). They allow one to define the constants  $A$  and  $B$ :

$$\text{to } y = \frac{h}{2}; \quad \tau = A\frac{h^2}{4} + B; \quad B = -A\frac{h^2}{4} \quad (4)$$

$$\text{to } y = \xi; \quad \tau = \mu\sigma_n; \quad A = \frac{\mu\sigma_n}{\xi^2 - \frac{h^2}{4}} \quad (5)$$

The equilibrium conditions on the beam cross-section guarantee that the transverse forces remain identical on both sides of the cross-section. Thus the sum of the stresses integrated over the section is equal to the transverse force:

$$T = b \int_{-\frac{h}{2}}^{-\xi} (Ay^2 + B) dy + b \int_{-\xi}^{\xi} \mu\sigma_n dy + b \int_{\xi}^{\frac{h}{2}} (Ay^2 + B) dy \quad (6)$$

Using the previous equation, it is possible to find the boundaries  $[-\xi; \xi]$  of the sliding zone:

$$\xi = \frac{-2h + \frac{3T}{b\mu\sigma_n} + \sqrt{\left(2h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n}\right) \left(-6h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n}\right)}}{8} \quad (7)$$

To conclude, the stresses are defined for the entire structure, particularly in the joints where there are two zones: the sticking zone and the sliding zone. A geometrical parameter  $\xi$  defining both zones is determined. In previous studies [Goodman and Klumpp, 1956; Earles, 1966], the nonuniform normal stresses involved partial slips located on the exterior of the contact area whereas the sticking zone is located at the center of the said area. In our benchmark, the sliding originates at the center of the contact region. This can be explained by the uniform contact normal stresses and the parabolic shear stresses.

### 3.2. Computation of the sliding motion

This part of the study aims to find a semi-analytical model to describe the relative motion in the interface. Between the two sides of the joint, it is assumed that: the displacement is parabolic, the greatest relative displacement is located at the center ( $y = 0$ ) of the interface and that there is no sliding for:  $y \geq \xi$  and  $y \leq -\xi$ . A finite element simulation is then performed in order to obtain the value of the maximum relative displacement. It is assumed that the stresses are independent of the  $z$ -axis: this leads to the plane-stress assumption. A schema of the finite element model used is given in Fig. 8. There is no relative motion for  $y \geq |\xi|$ , thus the model is defined for  $y \in [-\xi; \xi]$ . Due to the symmetry of the beam, the FEM is defined for  $x \in [0; l/4]$ . The model parameters are:

- length  $l/4$  and height  $2\xi$ ;
- kinematic boundary condition: nil displacement along  $y$  applied on the edges:  $y = \xi$ ;  $y = -\xi$ ; nil displacement along  $x$  applied on the edges:  $x = 0$ ;

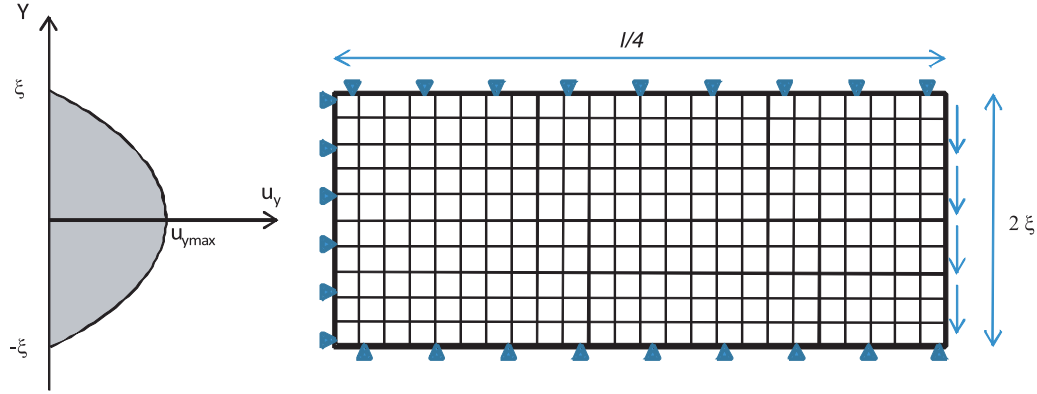


Fig. 8. Finite element model — relative displacement (on the left) — mesh and boundary conditions (on the right).

- constant transverse load distributed along the  $y$ -axis and applied on the cross-section at  $l/4$ .

The analysis of the relative transverse displacement in the cross-section validates the assumption of a parabolic field. The greater value of the  $u_{y\max}$  displacement is proportional to  $\xi$ , see Fig. 9. The  $C$  parameter is thus defined as follows:

$$u_{y\max} = C \xi \quad (8)$$

Parametric analyses were performed. They showed that  $u_{y\max}$  is independent of geometric parameters  $b$ ,  $h$  and  $l$ , see Fig. 9. Moreover, they showed that  $u_{y\max}$  depends on both material parameters  $E$  and  $\nu$ , see Fig. 9. Consequently, the field of relative displacement along  $y(u_y)$  in the sliding zone is defined by:

$$u_y = \frac{C}{\xi}(y^2 - \xi^2) \quad (9)$$

### 3.3. Hysteresis loop in the planar joint

Figure 10 illustrates each phase of the load and details the relative displacement and the shear stresses in the planar joint.

*Phase -1:*  $T \in [0; T_{G0}]$  with  $T_{G0} = \frac{2}{3}\mu\sigma_n S$ .

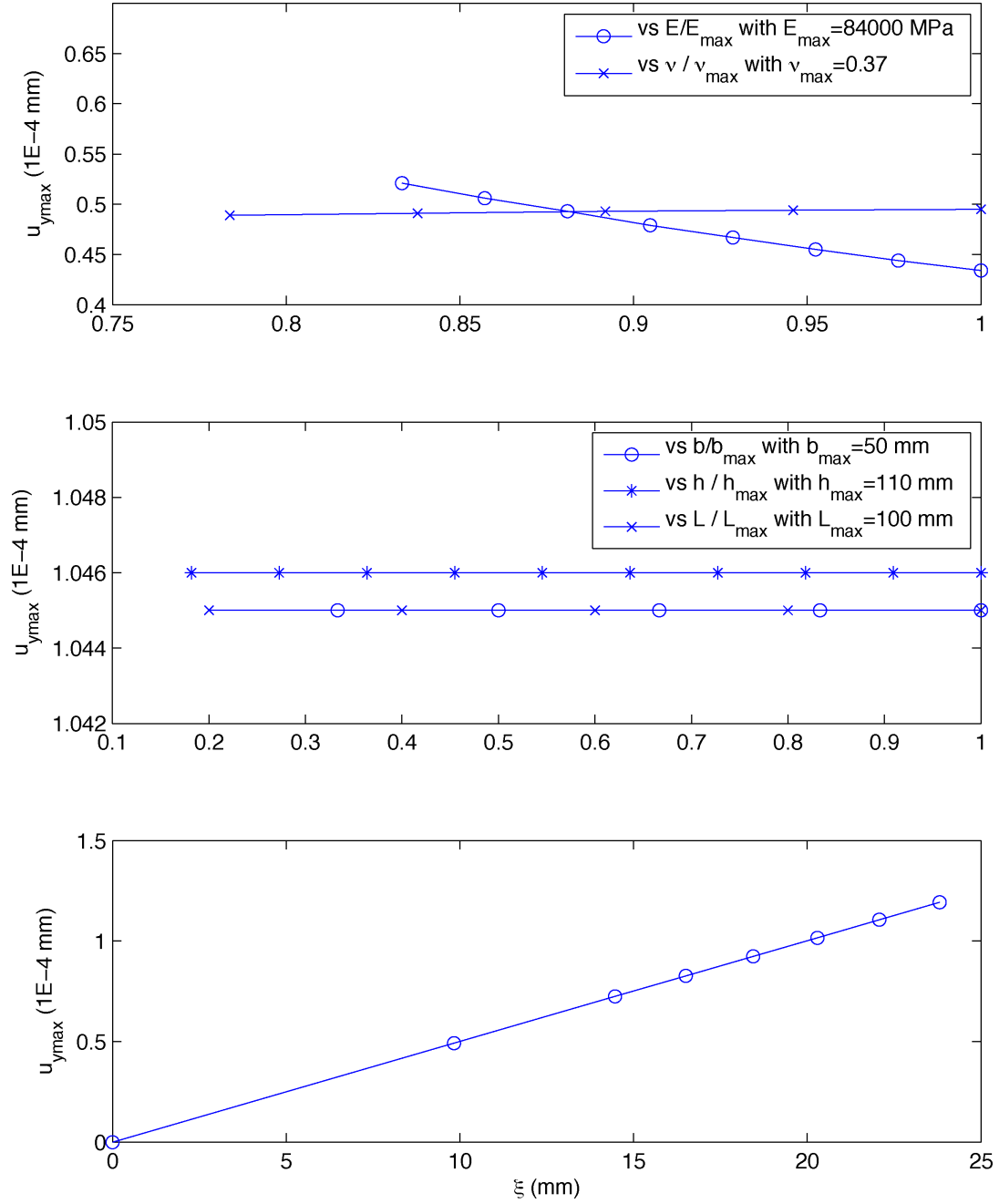
There is no sliding in the joint. The distribution of shear stresses  $\tau$  is the same as in the MB, see Eq. (1).

*Phase 0:*  $T \in [T_{G0}; T_{\max}]$ .

The partial sliding begins in the interface and propagates until the maximum of  $T_{\max}$  load is reached (lower than the total sliding  $\mu N$  transverse load). The distribution of shear stresses  $\tau$  is shown in Fig. 7.

In the sticking zone,  $y \in [\frac{h}{2}; \xi] \cup [-\xi; -\frac{h}{2}]$ , the stresses are given by:

$$\tau = \left( \frac{\mu\sigma_n}{\xi^2 - \frac{h^2}{4}} \right) \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (10)$$


 Fig. 9. Study of the dependence of  $u_{y \max}$ .

where the limits  $\xi$  are defined as follows

$$\xi = \frac{-2h + \frac{3T}{b\mu\sigma_n} + \sqrt{\left(2h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n}\right) \left(-6h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n}\right)}}{8} \quad (11)$$

The relative displacement is equal to zero:

$$u_y = 0 \quad (12)$$



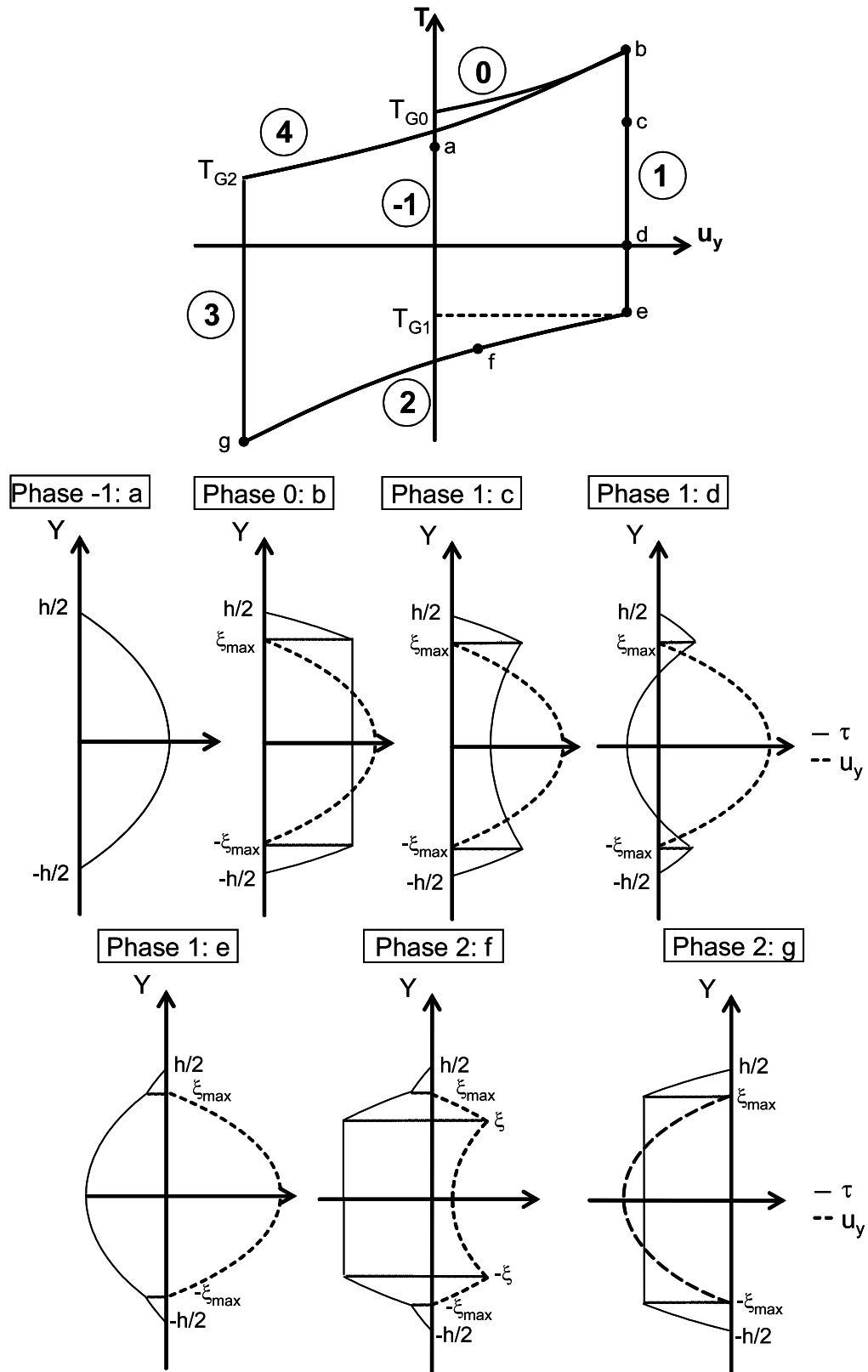


Fig. 10. Details of hysteresis loop in the planar joint.

In the sliding zone,  $y \in [\xi; -\xi]$ , the stresses are expressed as follows:

$$\tau = \mu \cdot \sigma_n \quad (13)$$

and the relative displacement is:

$$u_y = \frac{C}{\xi}(y^2 - \xi^2) \quad (14)$$

At the end of this phase,  $\tau = \tau_0$  and  $u_y = u_{y0}$  are defined as the residual stress and displacement, respectively.

*Phase 1:*  $T \in [T_{\max}; T_{G1}]$  with  $T_{G1} = T_{\max} - \frac{4}{3}S\mu\sigma_n$ .

The load decreases to the negative sliding limit (see Fig. 11). The typical shear-stress state of the MB (i.e., for sticking joints) is added to the previous residual state. For  $y \in [\frac{h}{2}; \xi] \cup [-\xi; -\frac{h}{2}]$ , it leads to:

$$\tau = \left( \frac{\mu \cdot \sigma_n}{\xi_{\max}^2 - \frac{h^2}{4}} + \frac{T}{2I_{Gz}} \right) y^2 - \left( \frac{3}{2} \frac{T}{S} + \frac{\mu \cdot \sigma_n}{\xi_{\max}^2 - \frac{h^2}{4}} \cdot \frac{h^2}{4} \right) \quad (15)$$

No relative displacement is added to the previous state:

$$u_y = 0 \quad (16)$$

For the zone located at the center of the cross-section,  $y \in [\xi; -\xi]$ , the stress state can also be computed as the sum of the previous stress state plus the typical sticking shear stress:

$$\tau = \mu\sigma_n + \left( \frac{T}{2I_{Gz}} y^2 - \frac{3}{2} \frac{T}{S} \right) = \frac{T}{2I_{Gz}} y^2 - \left( \frac{3}{2} \frac{T}{S} - \mu\sigma_n \right) \quad (17)$$

No more relative displacement is added to the previous state:

$$u_y = u_{y0} \quad (18)$$

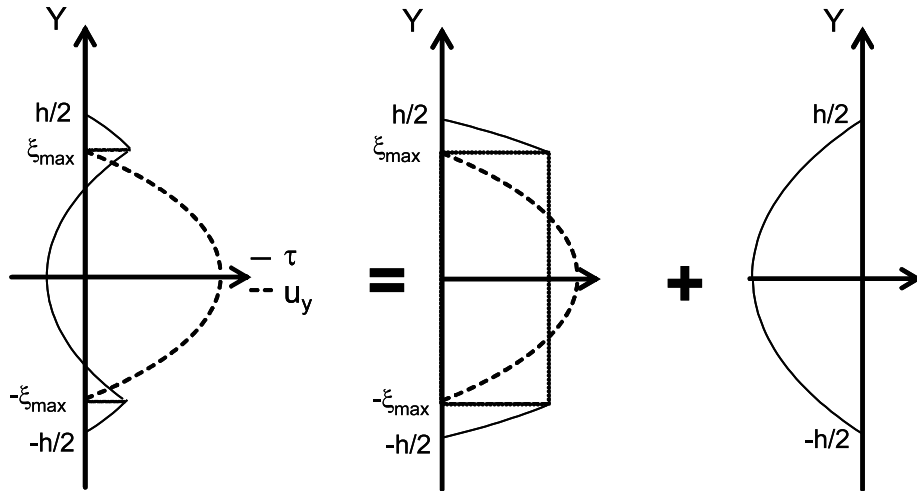


Fig. 11. Phase 1: Decomposition of shear stress and slip.

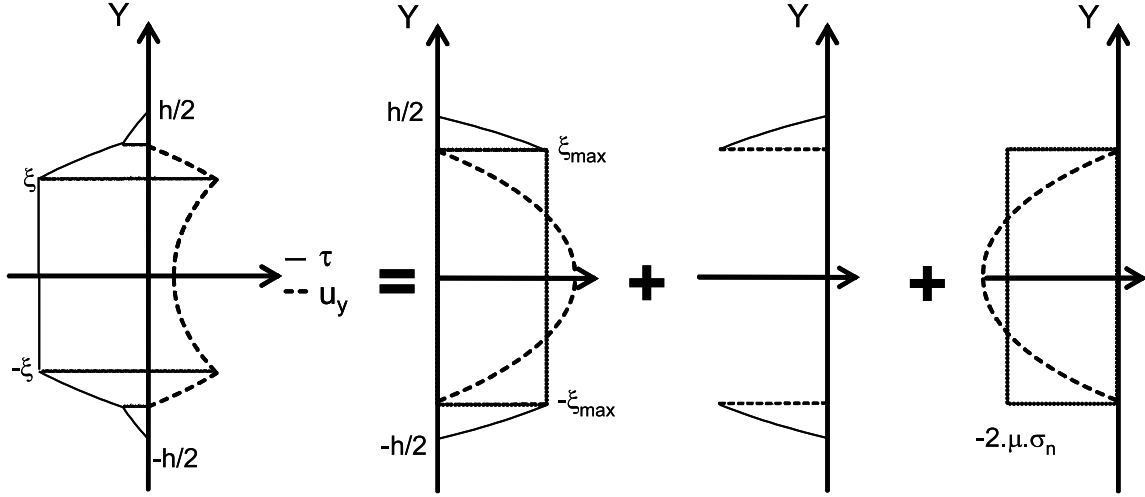


Fig. 12. Phase 2: decomposition of shear stress and slip.

Phase 2:  $T \in [T_{G1}; -T_{\max}]$ .

Partial sliding occurs again in the joint until the maximum load is reached (see Fig. 12). For  $y \in [\frac{h}{2}; \xi] \cup [-\xi; -\frac{h}{2}]$ , the stresses are given by:

$$\tau = \tau_0 - \left( \frac{2\mu\sigma_n}{\xi^2 - \frac{h^2}{4}} \right) \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (19)$$

where the limit  $\xi$  is defined below

$$\xi = \frac{-2h - \frac{3(T-T_{\max})}{2b\mu\sigma_n} + \sqrt{\left( 2h + \frac{3(T-T_{\max})}{2b\mu\sigma_n} \right) \left( -6h + \frac{3(T-T_{\max})}{2b\mu\sigma_n} \right)}}{8} \quad (20)$$

In this zone, the sliding is equal to zero:

$$u_y = 0 \quad (21)$$

Inside the cross-section,  $y \in [\xi; -\xi]$ , the shear stress is equal to the sliding friction stress:

$$\tau = \tau_0 - 2\mu\sigma_n = -\mu\sigma_n \quad (22)$$

The relative displacement is given by:

$$u_y = u_{y0} - \frac{C}{\xi} (y^2 - \xi^2) \quad (23)$$

Phases 3 and 4 can be deduced from Phases 1 and 2 using the central symmetry of the hysteresis loop.

#### 4. Loss Factor of the Structure

This part aims to define the dissipated energy in order to compute the damping and to use the latter to perform dynamic simulations. In a first approach, one can

consider the dissipated energy on a complete hysteresis loop to be four times greater than the energy computed on one quarter of the loop.

#### 4.1. Dissipated energy in the interface

The shear stresses between the two parts of the beam  $P_1$  and  $P_2$  along the cross-section (see Fig. 13) are defined by:

$$\text{Stress}(P_2/P_1) = \tau \quad \text{then} \quad \text{Stress}(P_1/P_2) = -\tau \quad (24)$$

The displacement of  $P_1$  versus the  $y$ -coordinate is defined by:

$$u(P_1/0) = u_y(\xi) \rightarrow u(P_2/0) = -u_y(\xi) \quad (25)$$

The relative displacement of  $P_1$  versus  $P_2$  is defined by:

$$u(P_1/P_2) = u(P_1/0) + u(0/P_2) = 2u_y(\xi) \quad (26)$$

The expression of the work of the shear stresses in the relative displacement field is given by:

$$dW_{\text{diss}} = -2\tau du_y(\xi) \quad (27)$$

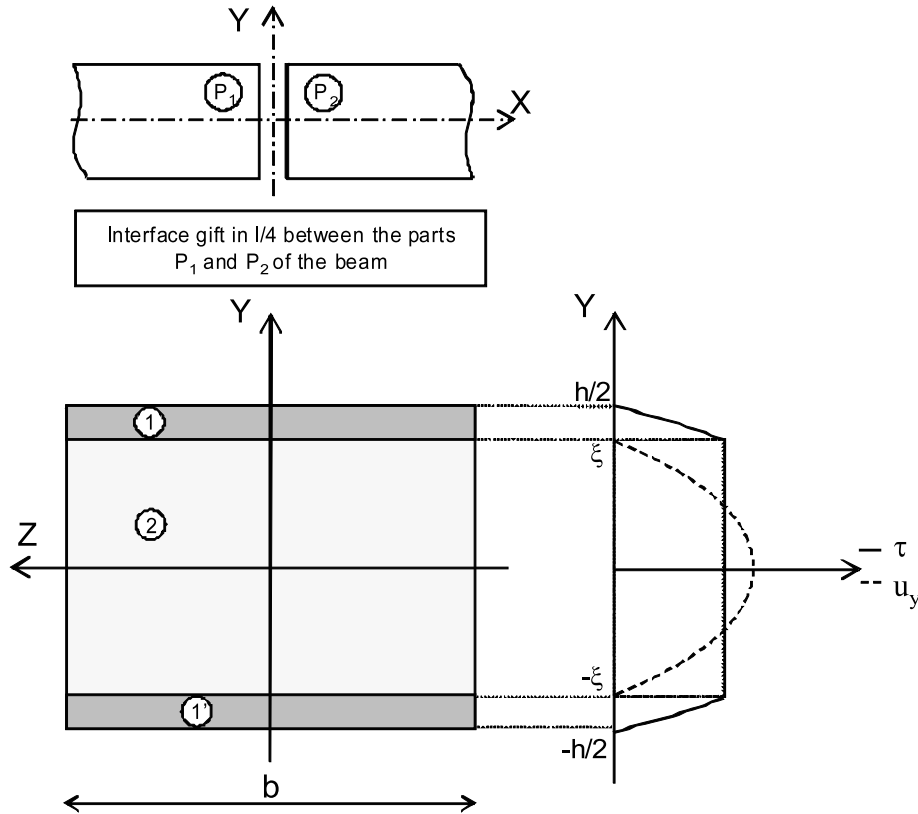


Fig. 13. Interface/stresses and relative displacement field.

The double integral over the contact area and over the displacement cycle gives the whole dissipated energy:

$$W_{\text{diss}} = -2 \int_S \int_0^{u_y \max} \tau du_y ds, \quad (28)$$

which can be expanded, separating the sliding zone and the sticking zone:

$$W_{\text{diss}} = -2b \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{-\xi} \int_0^{u_y \max} \tau du_y dy + \int_{-\xi}^{\xi} \int_0^{u_y \max} \tau du_y dy + \int_{\xi}^{\frac{h}{2}} \int_0^{u_y \max} \tau du_y dy \right] \quad (29)$$

In zones 1 and 1' (see Fig. 13), there is no relative displacement between the two parts, so in these areas:  $u_y = 0$ .

In zone 2, the shear stress  $\tau$  is constant, thus:

$$W_{\text{diss}} = 2b\tau \int_{-\xi}^{\xi} \int_0^{u_y \max} du_y dy \quad (30)$$

The first Coulomb–Amontons law allows us to get:

$$W_{\text{diss}} = -2b\mu\sigma_n \int_{-\xi}^{\xi} \int_0^{u_y \max} du_y dy \quad (31)$$

Using the expression of  $u_y$  given by Eq. (9), for a quarter of the loading sequence (Fig. 10), leads to:

$$W_{\text{diss}} = \frac{8}{3}b\mu\sigma_n C\xi^2, \quad (32)$$

and for the whole structure (two interfaces at  $l/4$  and  $3l/4$ ):

$$W_{\text{diss}} = \frac{16}{3}b\mu\sigma_n C\xi^2. \quad (33)$$

Substituting Eq. (7) into the previous equation, we obtain:

$$W_{\text{diss}} = \frac{1}{6}b\mu\sigma_n C \left( -2h + \frac{3T}{b\mu\sigma_n} \right) \cdot \left[ 2h + \frac{3T}{b\mu\sigma_n} + \sqrt{\left( 2h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n} \right) \left( -6h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n} \right)} \right] \quad (34)$$

The EL versus the ratio between the  $T$  transverse force and the  $N$  normal load is shown in Fig. 14. The shape of this curve is very similar to that obtained experimentally by Earles and Philpot [1967].

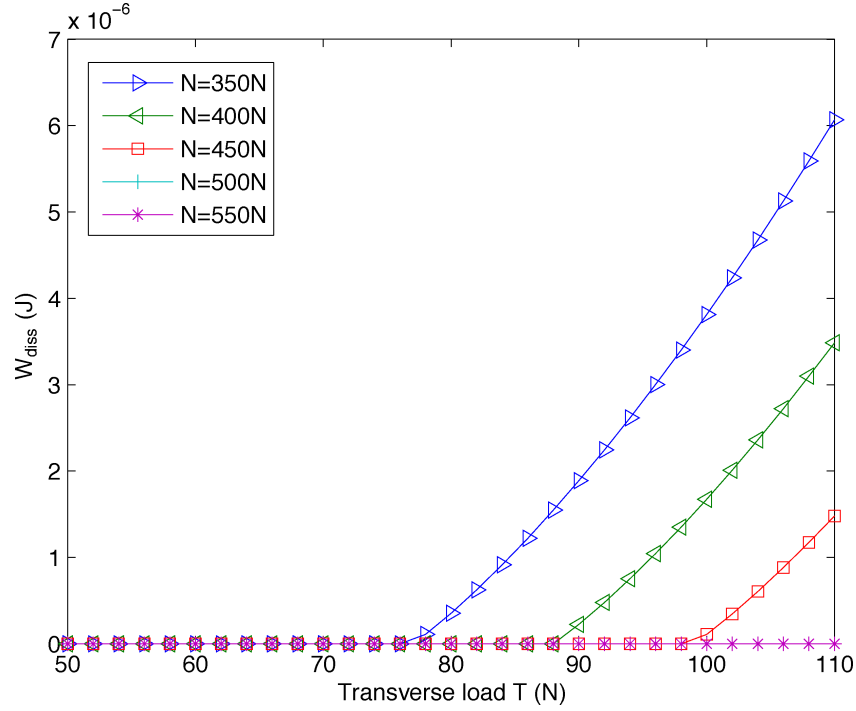


Fig. 14. Energy losses of the structure according to the normal and the tangential load.

#### 4.2. Strain energy of the structure

The work of the transverse force applied to the structure is estimated in order to compute the loss factor. The displacement field of the clamped-clamped beam is given by:

For  $x \in [0; \frac{l}{2}]$ :

$$v(x) = -\frac{T}{EI_{Gz}} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{l}{8}x^2 \right) \quad (35)$$

For  $x = \frac{l}{2}$ :

$$v = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{T}{EI_{Gz}} \frac{l^3}{96} \quad (36)$$

The value of  $T$  can be deduced:

$$T = \frac{96EI_{Gz}}{l^3} v \quad (37)$$

The work of the transverse load  $2T$  in the displacement  $v$  for one-half of the loading sequence is expressed by:

$$W_{\text{ext}} = 2Tv = \frac{T^2 l^3}{48EI_{Gz}} \quad (38)$$

The strain energy of the structure is defined by:

$$E_d = \frac{W_{\text{ext}}}{2} \quad (39)$$

### 4.3. Loss factor of the structure

The loss factor is defined by the ratio between the energy dissipated by the friction force and the strain energy of the structure. For the loading sequence, we get the following approximated expression for the loss factor (i.e., four times the quarter of the hysteresis loop):

$$\eta = \frac{W_{\text{diss}}}{2\pi E_d} = \frac{W_{\text{diss}}}{\pi W_{\text{ext}}} = 16 \frac{b\mu\sigma_n CEI_{Gz}}{\pi T^2 l^3} \left( -2h + \frac{3T}{b\mu\sigma_n} \right) \cdot \left[ 2h + \frac{3T}{b\mu\sigma_n} + \sqrt{\left( 2h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n} \right) \left( -6h - \frac{3T}{b\mu\sigma_n} \right)} \right] \quad (40)$$

Figure 15 shows the plot of  $\eta$  versus  $T$  for several values of  $N$ . The evolution of  $\eta$  is again in very good agreement with the experimental results given by Earles and Philpot [1967].

Finally, the loss factor can also be expressed as a function of  $v$ :

$$\eta = \frac{b\mu\sigma_n Cl^3}{576v^2 EI_{Gz}} \left( -2h + \frac{288EI_{Gz}}{b\mu\sigma_n l^3} v \right) \cdot \left[ 2h + \frac{288EI_{Gz}}{b\mu\sigma_n l^3} v + \sqrt{\left( 2h - \frac{288EI_{Gz}}{b\mu\sigma_n l^3} v \right) \left( -6h - \frac{288EI_{Gz}}{b\mu\sigma_n l^3} v \right)} \right] \quad (41)$$

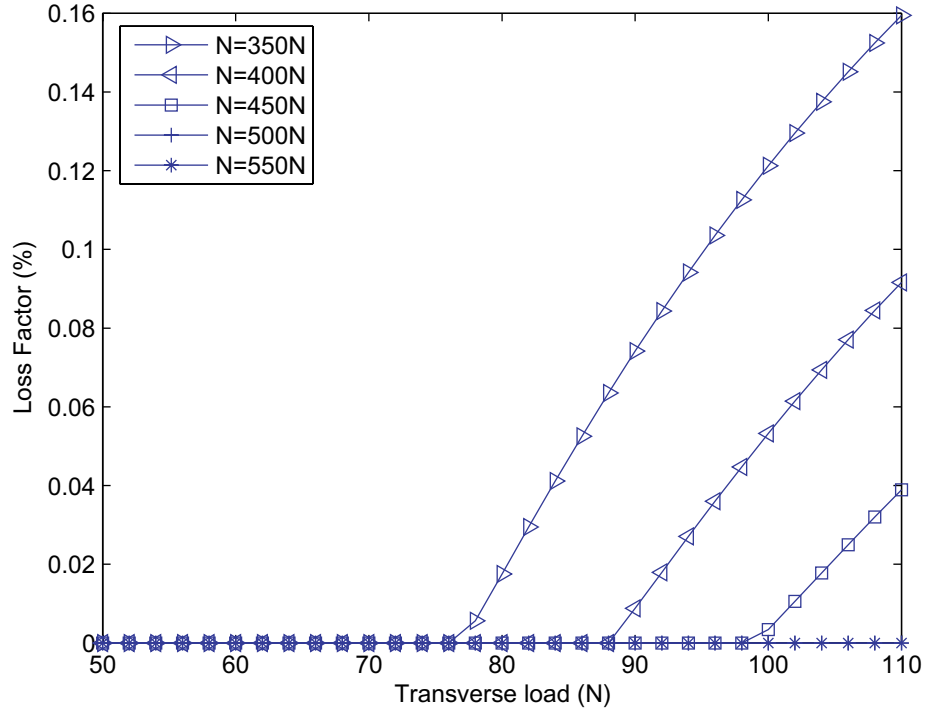


Fig. 15. Loss factor of the structure according to the normal and the tangential load.

## 5. Dynamic Behavior of the Structure

The dynamic steady-state response of the first mode of the clamped–clamped beam, to an harmonic  $2\hat{T}$  transverse load is studied. An “equivalent” structural damping is assumed and it is presumed to be dependent only on the magnitude of the displacement and is frequency-independent. In time domain, it is known that the response of an oscillator with structural damping to the impulse is noncausal, i.e., the system reacts before the impulse is applied to the system. To avoid the problem of non-causality, Makris [1997] proposed a revised version by requiring that the real and imaginary parts of its transfer functions satisfy the Kramers–Kronig relations. This causal expression of the time impulse function had already been found by Argoul [1991] who saw the structural model as the limiting case (first-order) of the spring-pot which is the basis element of the fractional calculus, when the exponent of the fractional differentiation tends towards zero. In time domain, the use of the structural damping model stays difficult mainly due to numerical implementation; thus, the LF can be chosen as a constant but the validity of this modeling will be limited to the frequency and amplitude at which it is calculated. The corresponding loss factor is obtained from Eq. (41) by replacing  $v(t) = v(\frac{l}{2}, t)$  by  $\hat{v}(\frac{l}{2}, \omega)$  where  $\hat{v}(\frac{l}{2}, \omega)$  is the Fourier Transform of  $v(\frac{l}{2}, t)$ .

A Single Degree of Freedom (SDoF) system with a natural frequency  $\omega_0$  equal to the frequency of the first mode of the clamped–clamped beam is defined. Then, the equivalent structural damping is added to the model and the equation in the frequency domain becomes:

$$[-\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\eta(\hat{v}))\text{sign}(\hat{\omega})]\hat{v} - \hat{t} = 0 \quad (\hat{t} = 2\hat{T}/m) \quad (42)$$

The obtained algebraic equation is nonlinear, thus it is solved using the *fminsearch* optimization program provided by *Matlab*®. The displacements  $\hat{v}$  are computed for various angular frequencies  $\omega$  and excitation forces  $T$  and are plotted in Fig. 16. Far from the natural frequency, the displacements are too small to generate partial sliding in the interfaces. The system behaves like the undamped one. Near the natural frequency, the displacement grows up to a critical value for which the partial sliding occurs and generates damping. The response then becomes flatter than for an undamped system. Moreover, for the highest excitation forces, the displacements and the induced damping are greater. The dynamic stiffness of the beam is complex and can then be expressed as:

$$\hat{K} = \frac{\hat{t}}{\hat{v}} = -\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\eta(\hat{v})) \quad (43)$$

The  $1/\hat{K}$  flexibility is plotted for several values of the  $\hat{v}$  prescribed displacement in Fig. 17 (left) and for several values of the  $\hat{t}$  excitation force in Fig. 17 (right).

In Fig. 17 (left) for the lowest values of  $\hat{v}$ , the shape of the absolute value of  $1/\hat{K}$  is very sharp as for an undamped system. When  $\hat{v}$  increases, micro-sliding occurs and this shape becomes more and more flat corresponding to a drastic change (strong increase) in the damping. The same kind of conclusion has already



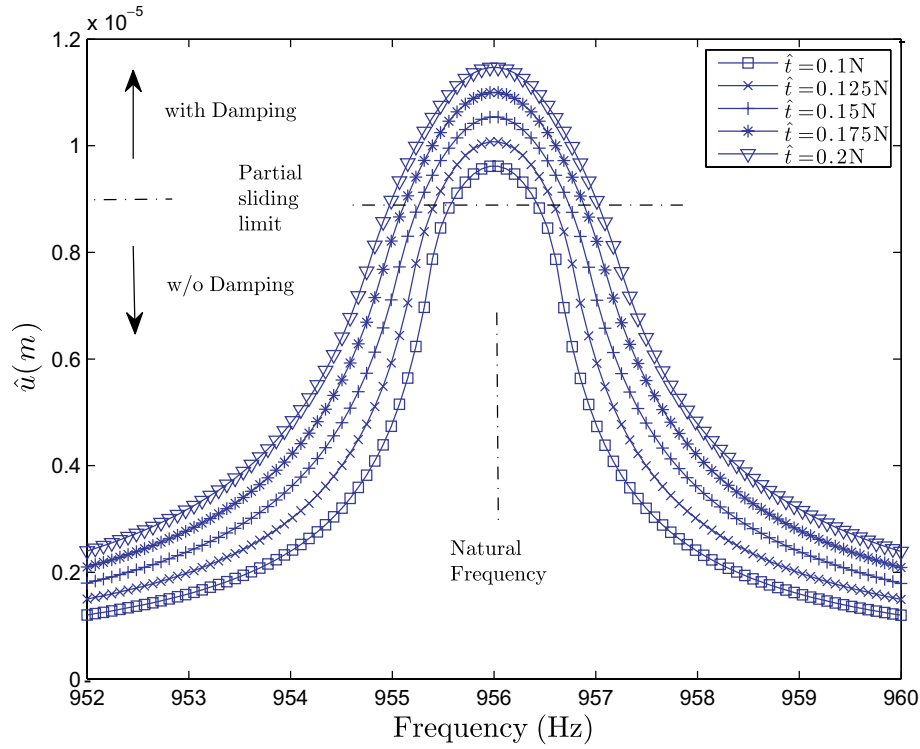


Fig. 16. Magnitude of the displacements for various excitation forces versus the frequency.

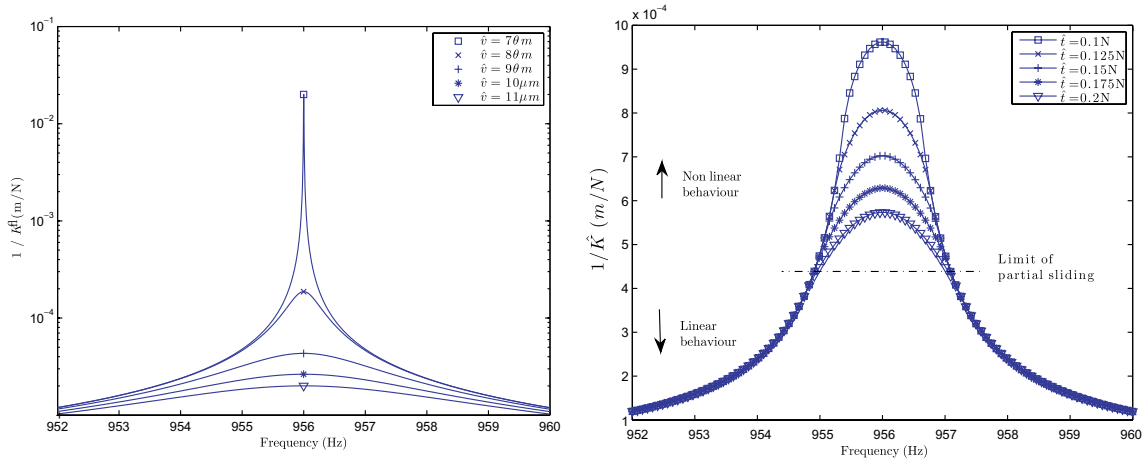


Fig. 17. FRF for an SDoF system according to several transverse displacements (left) and several transverse forces (right).

been found by Berthillier *et al.* [1998] on their experimental benchmark for small macro-slips.

In Fig. 17 right, all the results are the same below the limit of partial sliding due to the linear behavior. When partial sliding occurs, the loss factor becomes non-nil and widely depends on the value of  $\hat{v}$ . The FRFs become flatter and flatter as the value of  $\hat{t}$  increases. Thus the maximum amplitude of  $1/\hat{K}$  at the natural frequency

decreases. This is due to an increase of the damping that occurs near the natural frequency when the displacement increases.

For both curves (i.e., prescribed displacement and prescribed force), as the excitation level increases or the excitation frequency approaches the natural frequency, the loss factor increases simultaneously. Due to these observations, the linear models of damping are no longer valid to simulate the friction-induced loss factor. Nonlinear effects of partial sliding are visible in Fig. 17: when the displacement level increases, the dynamic flexibility is affected whereas this does not occur for a linear system. The damping is strongly dependent on the displacement magnitude. When the micro-sliding occurs, the nonlinear damping model shows a sudden change in the frequency response.

To confirm the previous results, a function of the instantaneous dissipation force depending on the displacement  $v$  and on the previous maximum displacement  $v_{\max}$ :  $f_d = f_d(v, v_{\max})$  has been deduced from the dissipated energy given in Eq. (34):

$$dW_{\text{diss}} = f_d dv \quad (44)$$

where  $f_d$  is given by:

$$f_d = \begin{cases} C \frac{96EI(2\xi+h)^2}{l^3(\xi+h)}, & \text{for } v \notin [-v_{G1}, v_{G1}] \\ 0, & \text{for } v \in [-v_{G1}, v_{G1}] \end{cases} \quad (45)$$

where  $\xi$  is a function of  $v$  and on  $v_{\max}$ :  $\xi = \xi(v, v_{\max})$  which can be deduced from Eq. (20).

Outside the interval  $[-v_{G1}, v_{G1}]$ , the  $f_d$  force grows suddenly up to the value which corresponds to the macro-sliding, see Fig. 18. In this figure, it is clearly seen

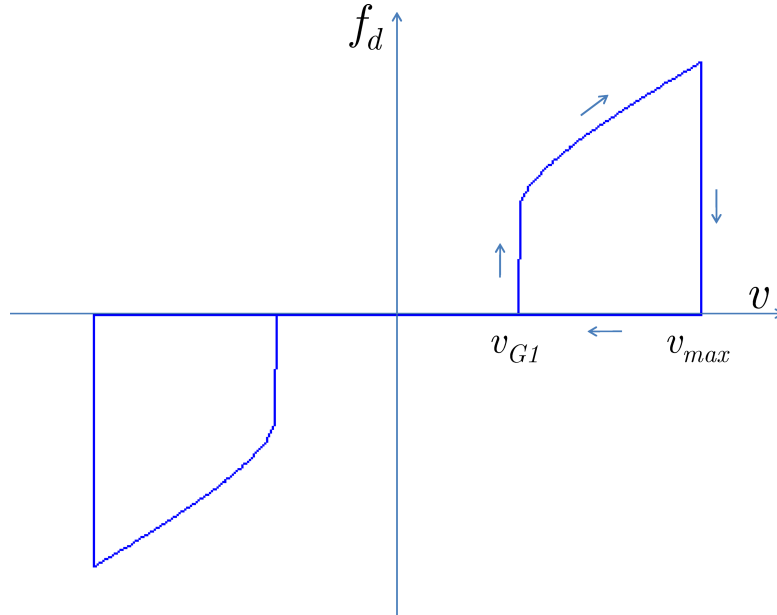


Fig. 18. Representation of the dissipation force  $f_d$  versus the displacement at the middle of the beam.

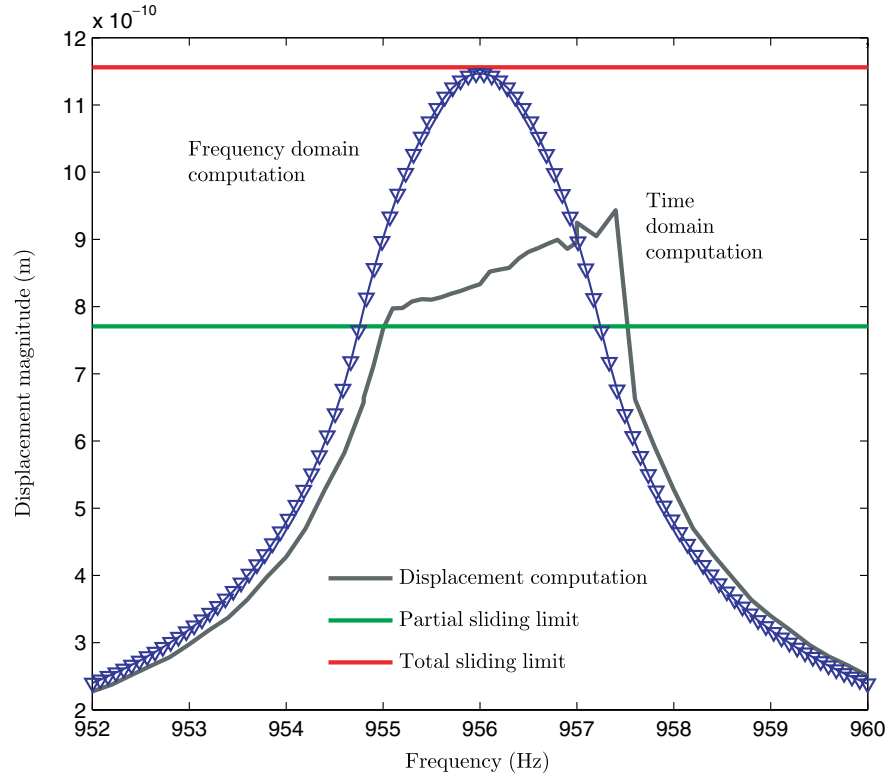


Fig. 19. Comparison between the results of the time-domain simulations and the frequency-domain simulations.

that the force exhibits two specific behaviors: the hysteretic loops and zero value for  $|v| < v_{G1}$ .

The force  $f_d$  is then introduced in the following differential equation:

$$m\ddot{v} + kv = -f_d(v, v_{\max}) \quad (46)$$

This equation is solved with the help of the ode45 method provided by *Matlab*<sup>®</sup> for each value of the angular frequency. The maximum value of the displacement  $\hat{v}$  is then plotted according to the frequency of the excitation, see Fig. 19. The results are compared to the previous ones. Before the partial sliding limit (around 955 Hz), the SDoF system behaves like a linear one with the frequency response function previously obtained. After the dissipation force occurs, this leads to a change in the response. The vibration levels around the natural frequency obtained from the time integration of the differential equation and from the frequency domain method, respectively, are quite different.

This can be explained by the fact that the energy losses are calculated on a whole cycle of dissipation in the frequency domain whereas they are calculated instantaneously in the time domain. The differences between both simulations is due to zero value effect in the dissipative force  $f_d$ . In fact, in the frequency domain the threshold effect is not taken into account whereas it is in the time domain. Thus, in time domain, the natural frequency sweeps within the 955–957 Hz frequency

range. The threshold effect is stronger than the dissipative effect which is taken into account in both simulations. Future simulations and experimentations will allow to define more accurately the threshold which seems to have a great importance in the study of the response.

## 6. Conclusions

A simple benchmark is proposed. It is made of beam with clamped–clamped conditions. The studied structure is loaded in simple bending, and is built with three beams linked by a contact interface with friction and an axial load. This simple benchmark can simulate the conditions of the loading of an assembly under constant and uniform normal stresses. An investigation along the surface of the interface is performed. It revealed that before the total sliding between two parts of the structure, a phase of partial sliding occurred. This phase of partial sliding was defined by the distribution of sliding displacement as well as by the distribution of shear stresses. It led to a dissipation of energy through friction, determined by a loss factor.

This benchmark describes the phenomenon of partial slip with a new distribution: the micro-slip originates at the center of the contact region. The loss factor increases strongly with the magnitude of the excitation. Moreover, due to the non-linear behavior of the joints, there is a strong difference between the FRFs when the excitation is a prescribed displacement or a prescribed load, and therefore, the assumption that the dynamic response of the beam is proportional to the excitation is no longer valid.

To conclude, this paper defines in an analytical way the energy dissipation mechanisms in a joint with constant and uniform normal stresses and its effects on the dynamic response of the structure have been evaluated.

## Acknowledgments

The authors would like to thank Tal Eisenzweig of Princeton University for her help in editing this paper.

## References

- Ahmadian, H. and Jalali, H. [2007] “Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures,” *Mech. Syst. Signal Process.* **21**, 1041–1050.
- Argoul, P. [1991] “Identification des structures vibrantes,” Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussees.
- Argoul, P. and Le, T. P. [2003] “Instantaneous indicators of structural behaviour based on continuous Cauchy wavelet transform,” *Mech. Syst. Signal Process.* **17**, 423–250.
- Beards, C. and Williams, J. [1977] “The damping of structural vibration by rotational slip in joints,” *J. Sound Vibration* **53**(3), 333–340.
- Benedetti, M. D., Garofalo, G., Zumpano, M. and Barboni, R. [2007] “On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyroshock,” *Acta Astronautica* **60**, 947–956.

- Berthillier, M., Dupont, C., Mondal, R. and Barrau, J. [1998] "Blades forced response analysis with friction dampers," *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.* **120**, 468–474.
- Caignot, A., Ladeveze, P., Neron, D., Gallo, V. L. and Romeuf, T. [2007] "Prediction by virtual testing of damping in the spatial structures," in *Proc. Colloque National en Calcul de Structures*.
- Chen, W. and Deng, X. [2005] "Structural damping caused by micro-slip along frictional interfaces," *Int. J. Mech. Sci.* **47**, 1191–1211.
- Earles, S. W. E. [1966] "Theoretical estimation of the frictional energy dissipation in a simple lap joint," *J. Mech. Eng. Sci.* **8**, 207–214.
- Earles, S. W. E. and Philpot, M. [1967] "Energy dissipation at plane surfaces in contact," *J. Mech. Eng. Sci.* **9**, 67–97.
- Esteban, J. and Rogers, C. A. [2000] "On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyroshock," *Comput. Struct.* **75**, 347–359.
- Goodman, L. and Klumpp, J. [1956] *Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-Blade Vibration* (Am. Soc. Mech. Eng. Appl. Mechanics Division).
- Heller, L. [2005] Damping in assemblies structures, Ph.D. thesis (Universite de Franche-Comte).
- Korkmaz, I., Barrau, J. J., Berthillier, M. and Creze, S. [1993] "Experimental dynamic analysis of cantilever beam damped by a dry friction damper," *Mecanique Industrielle et Materiaux* **46**(3), 145–149.
- Makris, N. [1997] "Causal hysteretic element," *J. Eng. Mech. ASCE* **123**(11), 1209–1214.
- Metherell, A. and Diller, S. [1968] "Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint-uniform clamping pressure," *Am. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech.* **35**, 123–128.
- Nanda, B. and Behera, A. [1999] "Study on damping in layered and jointed structures with uniform pressure distribution at the interfaces," *J. Sound Vibration*.
- Oldfield, M., Ouyang, H. and Mottershead, J. [2005] "Simplified models of bolted joints under harmonic loading," *Comput. Struct.* **84**, 25–33.
- Peyret, N., Dion, J. L., Chevallier, G. and Argoul, P. [2009] "Nonlinear dynamic behavior modelling of a planar friction interface in a structure assembly," in *Proc. IDTEC ASME*.
- Pian, T. [1957] "Structural damping of simple built-up beam with riveted joints in bending," *Am. Soc. Mech. Eng. Appl. Mech. Div.* **24**, 35–38.
- Poudou, O. and Pierre, C. [2007] Blades forced response analysis with friction dampers, Ph.D. thesis (University of Michigan).
- Ren, Y. and Beards, C. [1995] "Identification of joint properties of a structure using frf data," *J. Sound Vibration* **186**(4), 567–587.
- Ungar, E. E. [1973] "The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structure," *J. Sound Vibration* **26**(1), 141–154.
- Whiteman, W. and Ferri, A. [1996] "Displacement-dependent dry friction damping of a beam-like structure," *J. Sound Vibration* **198**(3), 313–329.
- Yang, B., Chu, M. and Menq, C. [1998] "Stick-slip-separation analysis and nonlinear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load," *J. Sound Vibration*.

**DETC2012-70196**

**A NUMERICAL QUASI-STATIC METHOD FOR THE IDENTIFICATION OF  
FRICTIONAL DISSIPATION IN BOLTED JOINTS.**

**Hugo Festjens\*,  
Gael Chevallier,  
Jean-Luc Dion**

LISMMA-EA2336, ISMEP (Supmeca)  
93400 Saint-Ouen, FRANCE

\*Email: hugo.festjens@supmeca.fr

**ABSTRACT**

The hereby paper investigates a way to compute the micro-sliding dissipations that occurs in built-up structures using modal coordinates. This numerical method extends the former quasi-static approach to modal displacements through the use of finite element analysis. Considered structures are supposed to behave linearly except for a lumped bolted joint. It is firstly assumed that mode shapes of such structures are few affected by contact non-linearities in joint interfaces. This assumption allows to apply the normal eigenmodes of the linearized structure as boundary conditions on a model reduced to the bolted joint. The method relies on a corrected quasi-static analysis associated with the Masing rules. Those assumptions enables to avoid the considerable numerical expense due to non-linear dynamics. In order to improve the simulation, a mode shapes correction is also implemented. The formulation of the method is detailed and investigated on the classical lap-joint benchmark.

**1 Introduction**

A large number of model, assuming Coulomb friction, have been developed to understand the dissipation in joints. Among the most famous benchmarks, we can mention the Goodman and Klumpp clamped beams with a longitudinal interface [1], the Metherell and Diller sandwich beams preloaded with a pure transverse force [2] and the Earles shear lap-joints [3]. In order to get the frictional dissipation over a cycling load, those authors

firstly used an analytical approach to solve the model equations with constant and uniformly distributed normal stresses and this approach is still investigated today, see [4-6]. Those studies have been extended to nonuniformly distributed normal stress with the use of the Finite Element Method, see Chen and Deng [7] and Heller [8] for example. In all those models, the joint is loaded with an axial force  $F$ , and the evolution of the interfacial stresses and slippage are assumed quasi-static. Frictional dissipation is then given in terms of loading cycles. Former analytical investigations showed that the energy dissipation  $D$ , is linked to the amplitude of the applied force  $F$  with a power-law relationship as  $D = \alpha F^n$  with  $n=3$ . Experimental investigations into axial joints [9] was able to establish the same power-law relationship with  $n$  between 2 and 3.

Other experimental studies aim to quantify the dynamical non-linear behaviour of a jointed structure. The classical lap-joint benchmark fitted with two beam connected with a bolted joint in its center has been investigated experimentally [10 -13]. The main difference with the previous works relies on the fact that the stresses underwent by the lap joint is due to modal displacement of the structure. The two first flexion modes are often investigated. In the case of modal solicitations, the joint is not only stressed in the axial direction and the normal contact pressure is not constant anymore. Under linear assumption the use of modal coordinates is useful to reduce the size of vibrational problems [14]. The purpose of this work is to extend the former quasi-static approach to modal solicitations through the use of

the finite element method.

It is seen that after a number of repetitive loading cycles, the response of a bolted joint structure, may lead to a stabilized state called limit cycle. In the case of an assumed linear structure, this limit cycle (deformation and amplitude) is known. Nowadays a large number of methods allows to compute non-linear dynamics. We can especially mention the harmonic balance or shooting methods [15] associated with continuation techniques. Those methods work well for a limited number of non-linear degrees of freedom. One of the strategies investigated in order to model mechanical joint consist in reducing the mechanical joint to a small number of degrees of freedom [16], and those non-linear methods can apply, see [17] or [18]. Another strategy consist in modelling precisely the mechanical joint with the help of a detailed finite element model assuming local coulomb law for friction see [19] or [20]. The geometry of the contact interface is often critical for the estimation of frictional dissipation [21] and so a great number of degree of freedom has to be kept in the model. As a first approach, one would solve this problem with the use of a numerical integration method such as Newmark scheme. The transient response would be calculated until the stabilized state is obtained. This approach can be quite expensive, since it may requires the application of many loading cycles before the stabilized response is obtained. This approach may be associated with a substructuring technique such as Craig-Bampton. However, the calculus of the constraint modes is also heavy when a great number of spatial degree of freedom must be kept. The method presented here, aims to avoid the considerable numerical expense due to the non-linear dynamic through the use of a corrected quasi-static analysis associated with the Masing rules. This assumption has often been made for the analysis of jointed structures, see [21] or [22]. Theses two assumptions allows a low CPU time consuming and accurate computations.

The governing equations and development of the method are detailed in the following section. Masing assumptions are discussed in the third section. In order to improve the simulation, two modal shapes correction methods are developed in the fourth. The method is investigated on the lap-joint benchmark in the last section.

## 2 Governing equations

Let's consider a linear structure fitted with a lumped non-linear joint subjected to a dynamic excitation. Using a finite element formulation, one can write the non-linear dynamic equation of the problem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_e \quad (1)$$

Where  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}$  denote, respectively, the mass and stiffness matrices.  $\mathbf{u}$  is the vector of nodal displacements,  $\mathbf{f}_e$  the external forces and  $\mathbf{f}_{\text{NL}}$  denotes the nodal contact forces.

### 2.1 Computation of the eigenmodes basis

The first step of the method consists in computing the eigenmodes basis of the whole structure. This analysis is carried out with a FE model where the joint is roughly meshed and fitted with a linearized contact law. Contact stiffness is linearized around the static equilibrium  $\mathbf{u}_0$  by calculating its Jacobian in order to get a linearized stiffness matrix:

$$\mathbf{K}_{\text{lin}} = \mathbf{K} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{u}_0} \quad (2)$$

Where  $\mathbf{v}$  denotes a small variation around the static equilibrium ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ ). Of course  $\mathbf{u}_0$  depends on the clamping force. An eigenvalue extraction can be conducted since the problem has been linearized:

$$(\mathbf{K}_{\text{lin}} - \mathbf{S}^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (3)$$

We get the linearized eigenvalue basis  $\boldsymbol{\psi}$  and natural angular frequencies  $\mathbf{S}$ .

### 2.2 Model reduction

One can split the whole structure in two substructures as shown fig 1:

An assumed linear domain  $\Omega_e$  that undergoes the external force  $\mathbf{f}_e$ .

The domain around the joint  $\Omega_j$ , that undergoes the external bolt clamping force and the non linear contact forces  $\mathbf{f}_{\text{NL}} = \mathbf{f}_{\text{clamping}} + \mathbf{f}_{\text{contact}}$ .

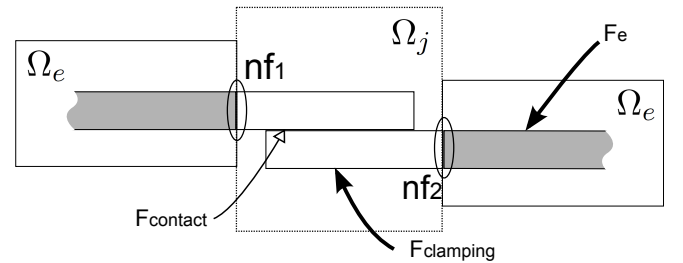


FIGURE 1. MODEL REDUCTION

The vector of nodal displacements can be divided as  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_j; \mathbf{u}_e]^T$ . Using this notation, equation 1 can be rewritten as the following coupled equations:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{jj}\ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{M}_{je}\ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_{jj}\mathbf{u}_j + \mathbf{K}_{je}\mathbf{u}_e + \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0} & (a) \\ \mathbf{M}_{ee}\ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{M}_{ej}\ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}_{ee}\mathbf{u}_e + \mathbf{K}_{ej}\mathbf{u}_j = \mathbf{f}_e & (b) \end{cases} \quad (4)$$

It is firstly assumed that the mode shapes and natural frequencies are not affected by the contact non-linearity. This assumption is used as a first approach and is extensively discussed in the fourth section. It allows to use the linearized structure basis  $\psi$  as "boundary conditions" on the domain  $\Omega_j$ . It is assumed that the eigenmode damping ratios are not coupled so we compute each one of them separately. We consider  $(\omega, \phi)$  one of the eigenmode of the modal basis. The nodal displacement in the linear domain is  $\mathbf{u}_e = \phi_e q$  where  $q$  denotes the modal amplitude. In this case, inertial forces are  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{M}\phi_e q$ . Equation 4a becomes:

$$\mathbf{K}_{jj}\mathbf{u}_j + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{u}_j) = (\omega^2 \mathbf{M}_{jj}\phi_j - \mathbf{K}_{je}\phi_e)q \quad (5)$$

$\mathbf{M}_{je}$  is neglected here since mass matrix coupled terms are often neglected by numerical integration in FEM but these terms can also be kept. In this equation, all the degrees of freedom belong to the domain  $\Omega_j$ . This allows to reduce the problem to the joint only where a great number of degree of freedom has to be kept in the model. Besides, acceleration terms no longer exist in the equation: The problem has also been reduced to quasistatic.

The presented study does not aim to focus on the contact problem itself and can be adapted to all the different techniques for the modelling of contact see [23-27]. Besides, it should be noticed that the method can easily be implemented on commercial solvers.

### 3 Computation of dissipated energy with the use of the Masing rules

The previous problem is solved iteratively for increasing modal amplitudes  $q_k = k\Delta q$  up to the maximal amplitude wanted  $q_{max}$ . We get the state of sliding (normal and friction forces and slippage) at the interfaces. In order to get the frictionally dissipated energy, the work of the friction force is simply integrated over the movement with the trapezoidal rule.  $\Delta q$  needs to be small enough so that the evolution of the strain field is small between two steps.

The finite element model of a jointed structure that assume local coulomb friction can be seen as an Iwan's series-parallel model [16]. This model is consistent with the Masing rules [28]. As a result it can be assumed that the model abide by the Masing rules. These rules simplify the modelling of hysteretic behaviors by assuming that a full cycle can be extrapolated from the force-displacement curve of the initial loading as shown fig.3. According to the Masing principle, the dissipated energy by friction during a cyclic loading  $D$  is just four times the work of the friction force over the initial loading:

$$D(q_k) = 4W_{0 \rightarrow q_k} \quad (6)$$

The Masing rules are of interest since they allow a large decrease in the number of computations: It is only needed to compute the loading from zero to the maximum amplitude  $q_{max}$  to get the dissipated energy over a full cycle  $D(q)$  for all  $q \leq q_{max}$ .

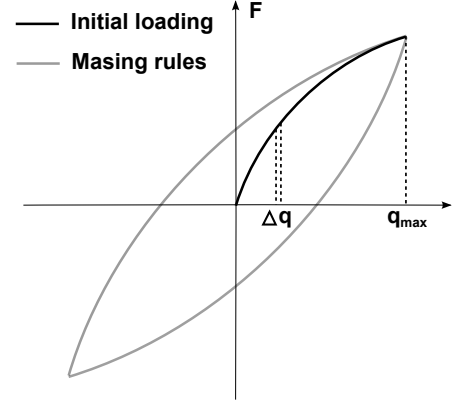
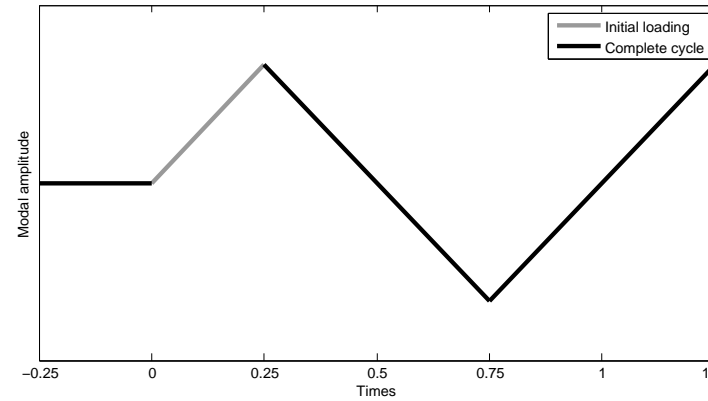


FIGURE 2. MASING PRINCIPLE



### 4 Modal shape correction

It is often assumed that modal shapes are weakly affected by the non-linear behavior of the bolted joint. However a small change of the displacement field may strongly affect the strain field especially at the interfaces and, as a result, the dissipated energy by friction. Thus we need to consider an amplitude-dependant mode shape.

#### 4.1 Residual shape

A classical approach is to calculate the residual shape error [29] to enhance the modal basis between each step. One can



write  $\mathbf{c}(q) = \phi q + \mathbf{r}(q)$ , where  $\mathbf{c}(q)$  denotes the corrected mode shape and  $\mathbf{r}(q)$  the residual shape.

Actually, eq. (4b) is not exactly satisfied under the assumption of amplitude independent modal shapes.

$$(\mathbf{K}_{ee} - \omega^2 \mathbf{M}_{ee}) \phi_e q + \mathbf{K}_{ej} u_j(q) - f_e = R_e(q) \neq 0$$

Since modal shapes are considered close to the resonance, the external forces can be neglected. Using the notation  $c(q) = \phi q + r(q)$ , we can get the residual shape  $r_e q$ :

$$R_e = \mathbf{K}_{ej} r_j(q) = -(\mathbf{K}_{ee} - \omega^2 \mathbf{M}_{ee}) r_e(q) \quad (7)$$

This linear equation requires the use of an iterative methods or the computing of the inverse of the matrices of the elastic part  $(\mathbf{K}_{ee} - \omega^2 \mathbf{M}_{ee})^{-1}$  that can be extremely CPU time consuming for large systems even if this matrix is usually very sparse.

## 4.2 Enhanced basis

Another way to correct the initial modal shape and avoid this heavy computation is to enhance the modal basis with a pre-determined set of corrector vectors. This set is computed by considering different cases in the contact interfaces corresponding to different amplitudes. If the contact pressure is led to vary over the movement, its evolution can be predicted from the eigenvector shape. Thus, an appropriate enhancement can be found by solving the linearized eigenstate problem eq.(3) for different  $\mathbf{K}_{lin}$ . For instance, a "large amplitude" vector can be computed by tying the different areas where the contact is likely to occur for large amplitude.

Once this enhanced basis  $\Pi = [\phi^{c1}, \dots, \phi^{cN}]$  is computed, a least square procedure is carried out in order to minimise the distance between a given linear combination of the vectors of this enhanced basis and the and the residual. This least square solution is:

$$\mathbf{q} = -(\Pi^T (\mathbf{K}_{ee} - \omega^2 \mathbf{M}_{ee})^T (\mathbf{K}_{ee} - \omega^2 \mathbf{M}_{ee}) \Pi)^{-1} \Pi^T (\mathbf{K}_{ee} - \omega^2 \mathbf{M}_{ee})^T \mathbf{K}_{ej} r_j(q) \quad (8)$$

where  $\mathbf{q}$  denotes the vector of modal amplitudes.

## 4.3 Updating

For the both methods, the estimated shape,  $\mathbf{e}(q_{k+1})$ , is calculated from the previous step following the update equation:

$$e(q_{k+1}) = \frac{v_{k+1}}{v_\phi q_k + v_r(q_k)} (\phi q_k + r(q_k)) \quad (9)$$

where  $v_{k+1} = v_k \pm \Delta v$  denotes the displacement of the observation node. Since linear assumption applies for small amplitudes,

the first iteration is given by  $\mathbf{r}(q_1) = \mathbf{0}$ . The amplitude-dependant natural angular frequency can be computed by considering the corrected mode shape:

$$\omega(q_k) = \sqrt{\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{M} \mathbf{c}}} \quad (10)$$

Finally the second terms of eq.5 are updated by using the estimated shape:

$$\mathbf{K}_{jj} \mathbf{u}_j + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{u}_j) = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e}} \mathbf{M}_{jj} \mathbf{e}_j - \mathbf{K}_{je} \mathbf{e}_e \quad (11)$$

An overview of the method with the modal shape correction is presented Fig.3.

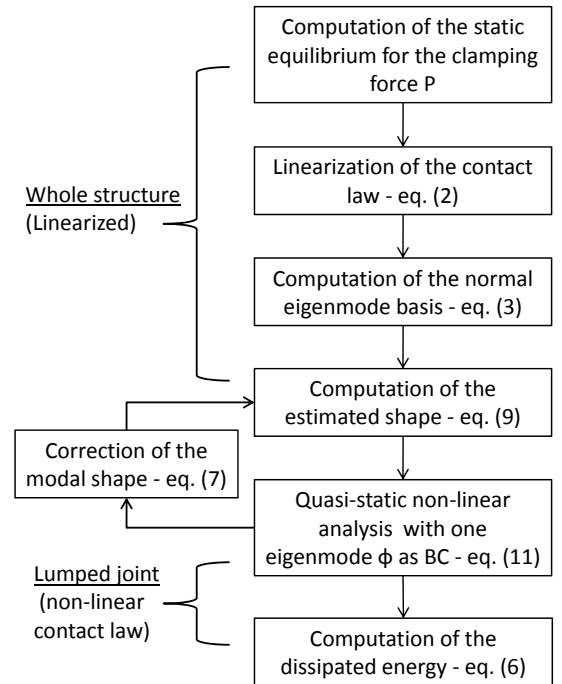
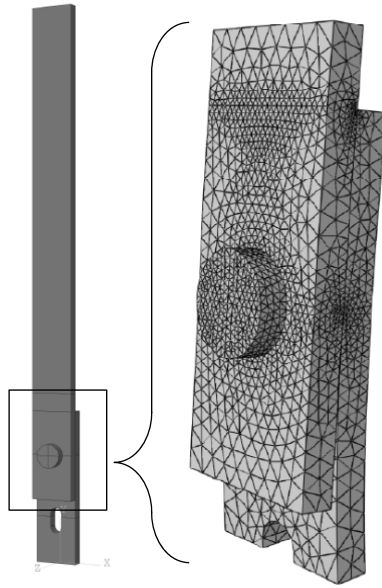
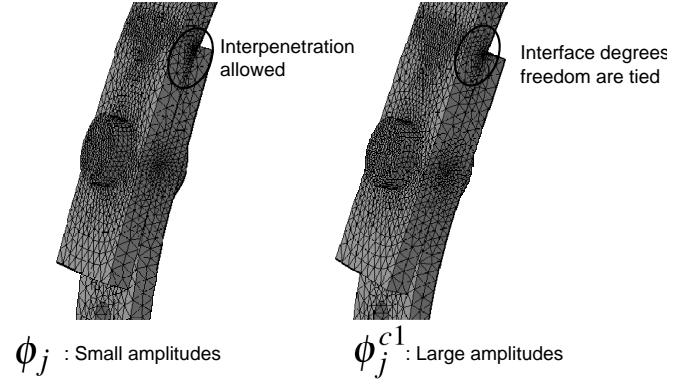


FIGURE 3. METHOD OVERVIEW

Whole structure :   Lumped joint :



**FIGURE 4.** THE FINITE ELEMENT MODEL



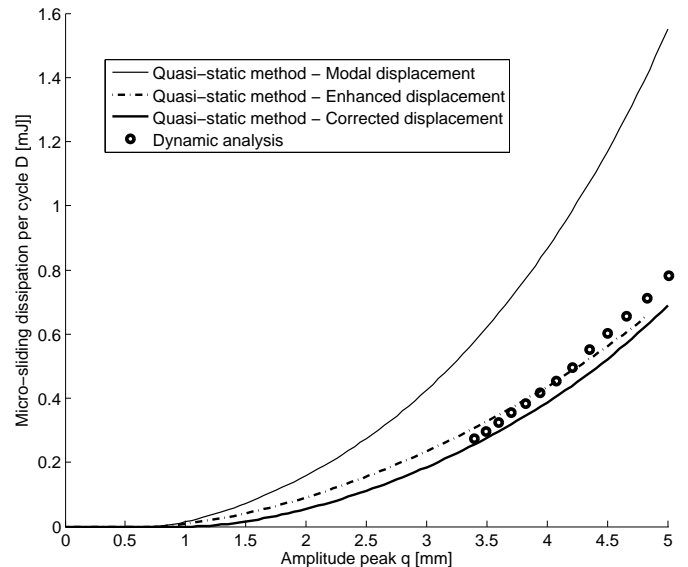
**FIGURE 5.** ENHANCEMENT

In order to approve the method, the obtained results are compared to those obtained with a more classical analysis: The model is initialised with the displacement  $\mathbf{u} = \phi q_{max}$  and the free response of the whole structure is computed using the implicit integration scheme of the Abaqus/standard solver. Figure 6 shows the micro-sliding dissipation per cycle versus the displacement of the top of the beam in its first flexion mode. The tightening force is set to  $P=4000\text{N}$ . Continuous lines are the dissipations computed with the quasi-static method and the cycles are the dissipations computed with the help of the dynamic analysis.

## 5 Example: the lap-joint benchmark

The method is investigated on the first flexion mode of the clamped-free lap-joint benchmark. The structure considered is depicted in Fig.4 and consists of a  $300\text{mm} \times 25\text{mm} \times 5\text{mm}$  beam made of steel with a lap joint at the bottom. Its finite element model is meshed with roughly 150.000 linear tetrahedron elements. Normal contact force is governed by a "hard contact". Friction is modelled with the Coulomb law with a constant friction coefficient  $\mu = 0.3$  and using a penalty method with an elastic slip fixed to  $1\mu\text{m}$ . This non-linear contact law is only considered at the interface between the two beams. The bolt clamping force is simulated with a preloaded spring.

The dissipated energy per cycle versus the modal amplitude has been computed for the first flexion mode of the lap-joint model. This computing has been carried out for with the two presented correction techniques and without correction. In the case of the enhancement technique, the initial modal shape has been enhanced with only one "large amplitude" vector. This vector has been computed by tying the degrees of freedom on the edge of the beams as shown fig.5.



**FIGURE 6.** COMPUTED MICRO-SLIDING DISSIPATION PER CYCLE VERSUS DISPLACEMENT OF THE TOP OF THE LAP-JOINT STRUCTURE IN ITS FIRST FLEXION MODE

Of course the dynamic analysis is very CPU time consuming since a lot of period must be computed (125 cycles have been computed to get the plotted circles). Besides numerical integration induces numerical damping which can lead to an overestimation of the actual dissipation. However, the results obtained by the quasi-static method with a modal shape correction are close to that computed with the dynamic analysis.

## 6 Conclusion

The hereby paper investigates a way to compute the microsliding dissipations that occurs in built-up structures using modal coordinates. This numerical method extends the former quasi-static approach to modal displacements through the use of finite element analysis. With the use of an enhancement technique, it is shown that modal coordinates can be used to accurately compute microsliding dissipations of built up structures.

## REFERENCES

- [1] Goodman, L., and Klumpp, J., 1956. "Analysis of slip damping with reference to turbine blade vibration, journal of applied mechanics". *Journal of Applied Mechanics*, **23**, p. 421.
- [2] Metherell, A. F., and Diller, S. V., 1968. "Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint uniform clamping pressure". *Journal of Applied Mechanics*, **35**, Mar., pp. 333–340.
- [3] Earles, S., 1966. "Theoretical estimation of the frictional energy dissipation in a simple lap joint". *Journal of mechanical engineering science*, **8**, pp. 207–214.
- [4] Nanda, B., 2006. "Study of the effect of bolt diameter and washer on damping in layered and jointed structures". *Journal of Sound and Vibration*, **290**(3-5), Mar., pp. 1290–1314.
- [5] Damisa, O., Olunloyo, V., Osheku, C., and Oyediran, A., 2008. "Dynamic analysis of slip damping in clamped layered beams with non-uniform pressure distribution at the interface". *Journal of Sound and Vibration*, **309**(3-5), Jan., pp. 349–374.
- [6] Peyret, N., Dion, J., Chevallier, G., and Argoul, P., 2010. "Micro-slip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress". *International Journal of Applied Mechanics*, **02**(02), p. 281.
- [7] Chen, W., and Deng, X., 2005. "Structural damping caused by microslip along frictional interfaces". *International Journal of Mechanical Sciences*, **47**(8), Aug., pp. 1191–1211.
- [8] Heller, L., 2005. "Amortissement dans les structures assemblées". PhD thesis, Université de Franche-Comte.
- [9] Ungar, E., 1973. "The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures". *Journal of Sound and Vibration*, **26**(1), Jan., pp. 141–154.
- [10] Tsai, J., and Chou, Y., 1988. "The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint". *Journal of Sound and Vibration*, **125**(3), Sept., pp. 487–502.
- [11] Hartwigsen, C. J., Song, Y., McFarland, D. M., Bergman, L. A., and Vakakis, A. F., 2004. "Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration". *Journal of Sound and Vibration*, **277**(1-2), Oct., pp. 327–351.
- [12] Jalali, H., Ahmadian, H., and Mottershead, J. E., 2007. "Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping". *International Journal of Solids and Structures*, **44**(25-26), Dec., pp. 8087–8105.
- [13] Heller, L., Foltete, E., and Piranda, J., 2009. "Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures". *Journal of Sound and Vibration*, **327**(1-2), Oct., pp. 183–196.
- [14] Quinn, D. D., 2011. "Modal analysis of jointed structures". In IDETC/CIE, ASME, ed.
- [15] Peeters, M., Viguie, R., Serandour, G., Kerschen, G., and Golinval, J., 2009. "Nonlinear normal modes, part II: toward a practical computation using numerical continuation techniques". *Mechanical Systems and Signal Processing*, **23**(1), Jan., pp. 195–216.
- [16] Segalman, D. J., 2002. "A Four-Parameter iwan model for Lap-Type joints". *Sandia report*, **SAND2002-3828**.
- [17] Ahmadian, H., and Jalali, H., 2007. "Generic element formulation for modelling bolted lap joints". *Mechanical Systems and Signal Processing*, **21**(5), July, pp. 2318–2334.
- [18] Jaumouille, V., Sinou, J., and Petitjean, B., 2010. "An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—Application to bolted structures". *Journal of Sound and Vibration*, **329**(19), Sept., pp. 4048–4067.
- [19] Crocombe, A., Wang, R., Richardson, G., and Underwood, C., 2006. "Estimating the energy dissipated in a bolted spacecraft at resonance". *Computers & Structures*, **84**(5-6), Jan., pp. 340–350.
- [20] Roulet, V., Champaney, L., and Boucard, P., 2011. "A parallel strategy for the multiparametric analysis of structures with large contact and friction surfaces". *Advances in Engineering Software*, **42**(6), June, pp. 347–358.
- [21] Wentzel, H., and Olsson, M., 2008. "Mechanisms of dissipation in frictional joints. influence of sharp contact edges and plastic deformation". *Wear*, **265**, Nov., pp. 1814–1819.
- [22] Argatov, I. I., and Butcher, E. A., 2011. "On the iwan models for lap-type bolted joints". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **46**(2), Mar., pp. 347–356.
- [23] Gwinner, J., and Brosowski, B., 1989. "A penalty approximation for a unilateral contact problem in nonlinear elasticity". *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **11**(4),

- July, pp. 447–458.
- [24] Hild, P., and Renard, Y., 2009. “A stabilized lagrange multiplier method for the finite element approximation of contact problems in elastostatics”. *Numerische Mathematik*, **115**(1), Nov., pp. 101–129.
  - [25] Eriten, M., Polycarpou, A. A., and Bergman, L. A., 2011. “A physics based fretting model with friction and integration to a simple dynamical system”. In *IDETC/CIE*, ASME, ed.
  - [26] Mayer, M., and Gaul, L., 2007. “Segment to segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **21**(2), Feb., pp. 724–734.
  - [27] Bograd, S., Reuss, P., Schmidt, A., Gaul, L., and Mayer, M., 2011. “Modeling the dynamics of mechanical joints”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **25**(8), Nov., pp. 2801–2826.
  - [28] Puzrin, A., Frydman, S., and Talesnick, M., 1995. “Normalized nondegrading behavior of soft clay under cyclic simple shear loading”. *Journal of Geotechnical Engineering*, **121**(12), p. 836.
  - [29] Balmès, E., 1996. “De l’utilisation de la norme en énergie pour la création de modèles réduits en dynamique des structures”. *CR Académie des sciences*, **323**, pp. 255–260.

